OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

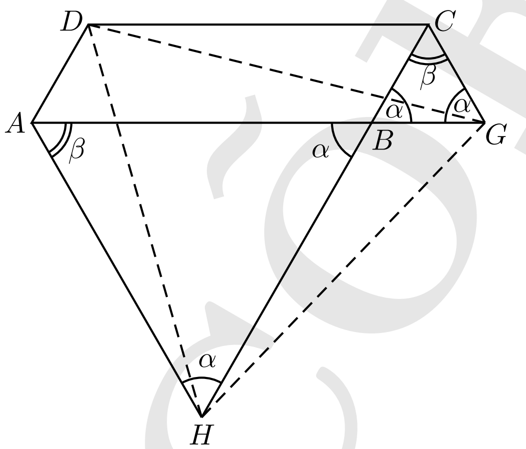
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - Final - 1º Dia - 15.03.2013 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Denote-se por α a amplitude de $\angle CBG$ e por β a amplitude de $\angle BCG$. Como $\angle ABH$ e $\angle CBG$ são verticalmente opostos, também se tem $A\hat{B}H = \alpha$. Por outro lado, por hipótese, o triângulo $[BCG]$ é isósceles de base $[BG]$, e o triângulo $[BAH]$ é isósceles de base $[BH]$, pelo que $C\hat{G}B = C\hat{B}G = \alpha$ e $A\hat{H}B = A\hat{B}H = \alpha$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conclui-se que $B\hat{A}H = 180^\circ - 2\alpha = \beta$. Uma vez que $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $D\hat{A}B = D\hat{C}B$, logo $D\hat{A}H = D\hat{A}B + \beta = D\hat{C}B + \beta = D\hat{C}G$. Além disso, $\overline{AD} = \overline{CG}$ e $\overline{AH} = \overline{CD}$, pelo que se conclui que os triângulos $[DAH]$ e $[GCD]$ são congruentes. Em particular, tem-se $\overline{DH} = \overline{DG}$, e portanto $[GDH]$ é isósceles.



2. Se o veraneante X é mais rápido do que o veraneante Y, então em cada percurso de X de um extremo ao outro da praia, X encontra Y exatamente uma vez (no percurso inicial e final esse encontro ocorreu no ponto de partida e no ponto de chegada). Portanto o mais rápido dos veraneantes A e B realizou 6 percursos e o mais rápido dos veraneantes A e C realizou 8 percursos. Assim, C é mais rápido do que A e do que B e realizou 8 percursos. Portanto B e C encontraram-se 8 vezes.

3. Para numerar as estradas procederemos da seguinte forma. Escolhemos uma cidade ao acaso e começamos a viajar escolhendo em cada cidade uma estrada ainda não visitada anteriormente. Prosseguimos até chegarmos a uma cidade servida apenas por estradas já anteriormente visitadas. Numeramos as estradas que percorremos pela ordem em que o fizemos a começar em 1. Todas as cidades visitadas cumprem agora a propriedade pretendida: a cidade inicial é servida pela estrada 1 logo o máximo divisor comum de todas as estradas que passam por ela será 1; nas cidades intermédias chegamos por uma estrada i e saímos por uma estrada $i+1$ e como o máximo divisor comum de dois números consecutivos é 1, também verificam a propriedade; por fim a cidade final ou é apenas servida por uma estrada (e nesse caso não viola a lei do Unistão) ou tem mais estradas que já foram visitadas, pelo que está numa das situações anteriores e já está em conformidade com a lei.

   Escolhemos agora, caso exista, uma cidade já visitada que ainda tenha estradas não numeradas partindo dela e repetimos o procedimento, usando apenas estradas ainda não numeradas e começando a numeração a partir do primeiro número ainda não utilizado. Repetimos o procedimento enquanto for possível.

   Pelo que vimos acima, todas as cidades visitadas estarão automaticamente em conformidade com a lei pelo que basta argumentar que todas as cidades serão eventualmente visitadas. Mas sabemos pelo enunciado do problema que para qualquer cidade há uma sequência de estradas que a liga à cidade que escolhemos como inicial, pelo que a visitaremos.