OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - Final - 1º dia - 15.03.2013 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) O perímetro da piscina é $9+9+6+6 = 30$ m$= 3000$ cm. Como cada azulejo mede 5 cm, o comprimento do friso é $3000 : 5 = 600$ azulejos. Se num retângulo 6×5, o padrão do friso que se repete, são gastos 18 azulejos azuis e $600 : 6 = 100$, vão ser usados $100 \times 18 = 1800$ azulejos azuis. Opção correta: C)

   (b) Observa-se imediatamente que $X = 1$. Se $I + M = 3$, então $P = 0$ e I ou M teriam que repetir um algarismo já usado. Portanto, $I + M = 13$, $O = 8$ e $P = 9$. Para não haver repetição de algarismos só há duas possibilidades: $1116 + 897 = 2013$ e $1117 + 896 = 2013$. Opção correta: C)

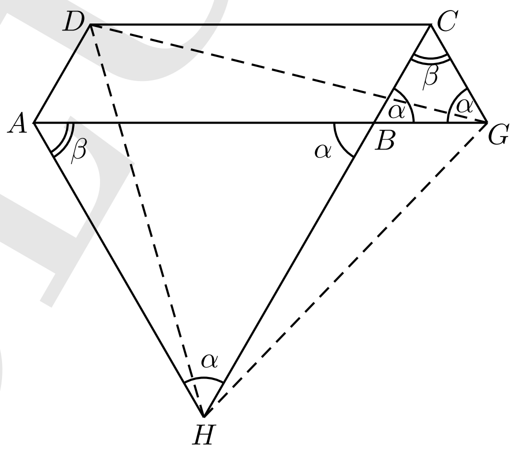
   (c) Seja S a soma dos comprimentos dos três segmentos de reta, Q a soma dos perímetros dos quadriláteros e T a soma dos perímetros dos triângulos. Então tem-se

$$T + Q = 2S + 19.$$

   Como $T = 20$ e $Q = 25$, então $S = 13$. Opção correta: B)

   (d) Se o outro cateto do triângulo mede a e a hipotenusa mede c, então pelo Teorema de Pitágoras tem-se $a^2 + 2013 = c^2$, pelo que $2013 = (c - a)(c + a)$. Há quatro formas de fatorizar 2013 como produto de dois números: $2013 = 1 \times 2013$, $2013 = 3 \times 671$, $2013 = 11 \times 183$ e $2013 = 33 \times 61$ e cada a uma destas formas corresponde um par de inteiros a e c nas condições pretendidas. Opção correta: E)

2. Denote-se por α a amplitude de $\angle CBG$ e por β a amplitude de $\angle BCG$. Como $\angle ABH$ e $\angle CBG$ são verticalmente opostos, também se tem $A\widehat{B}H = \alpha$. Por outro lado, por hipótese, o triângulo $[BCG]$ é isósceles de base $[BG]$, e o triângulo $[BAH]$ é isósceles de base $[BH]$, pelo que $C\widehat{G}B = C\widehat{B}G = \alpha$ e $A\widehat{H}B = A\widehat{B}H = \alpha$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, conclui-se que $B\widehat{A}H = 180^\circ - 2\alpha = \beta$. Uma vez que $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $D\widehat{A}B = D\widehat{C}B$, logo $D\widehat{A}H = D\widehat{A}B + \beta = D\widehat{C}B + \beta = D\widehat{C}G$. Além disso, $\overline{AD} = \overline{CG}$ e $\overline{AH} = \overline{CD}$, pelo que se conclui que os triângulos $[DAH]$ e $[GCD]$ são congruentes. Em particular, tem-se $\overline{DH} = \overline{DG}$, e portanto $[GDH]$ é isósceles.



3. A soma dos algarismos das unidades e das centenas pode variar entre 3 e 15 uma vez que pode ser escrita, de duas formas diferentes, como soma de algarismos distintos. Tendo em conta que o algarismo dos milhares não pode ser 0, a tabela seguinte apresenta o número de possibilidades para cada soma:

Soma	Casos	Nº de possibilidades para o algarismo dos milhares	Nº de possibilidades para o algarismo das centenas	Total
3	$3+0; 2+1$	3	2	6
4	$4+0; 3+1$	3	2	6
5	$5+0; 4+1; 3+2$	5	4	20
6	$6+0; 5+1; 4+2$	5	4	20
7	$7+0; 6+1; 5+2; 4+3$	7	6	42
8	$8+0; 7+1; 6+2; 5+3$	7	6	42
9	$9+0; 8+1; 7+2; 6+3; 5+4$	9	8	72
10	$9+1; 8+2; 7+3; 6+4$	8	6	48
11	$9+2; 8+3; 7+4; 6+5$	8	6	48
12	$9+3; 8+4; 7+5$	6	4	24
13	$9+4; 8+5; 7+6$	6	4	24
14	$9+5; 8+6$	4	2	8
15	$9+6; 8+7$	4	2	8
Total				368

Há portanto 368 números equilibrados.