OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

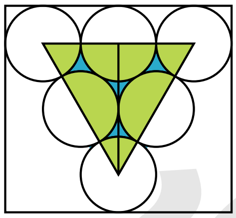
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2013 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A área pretendida obtém-se subtraindo a área da região assinalada a verde à área do triângulo equilátero que une três centros de circunferência, como indicado na figura.



Como o comprimento do retângulo é 6 cm, cada circunferência tem raio 1 cm, portanto os lados do triângulo medem 4 cm.

Pelo teorema de Pitágoras, conclui-se que a altura do triângulo mede $\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ cm. Assim, a área do triângulo é $\dfrac{4\times 2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ cm^2. A região assinalada a verde é constituída por três semicírculos e três sextos de círculo, cuja área total é $(3/2+3/6)\pi\times 1^2=2\pi$ cm^2.

Logo, a área da região assinalada a azul é $4\sqrt{3}-2\pi$ cm^2.

2. Designe-se por a a quantidade inicial de objetos bonitos e úteis e por b a quantidade de objetos bonitos e inúteis. Como b corresponde a $1/9$ do número final de objetos, então o número final de objetos é $9b$ e o número de objetos feios e úteis é $9b/4$. Além disso, o número final de objetos bonitos e úteis é igual a $9b-b-9b/4=23b/4$.

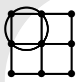
Como inicialmente o número de objetos úteis era $4/7$ do total e o número de objetos bonitos era $2/5$ do total, então

$$\frac{7}{4}\left(a+\frac{9b}{4}\right)=\frac{5}{2}(a+b)$$

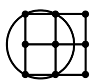
pelo que $a=23b/12$. Logo, o número final de objetos bonitos e úteis é $\dfrac{23b/4}{23b/12}=3$ vezes o número inicial.

3. **Solução 1:** Cada três pontos não colineares determinam uma circunferência. Há $\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$ conjuntos de três pontos, dos quais 8 são constituídos por pontos colineares (3 verticais, 3 horizontais e 2 diagonais). Se uma circunferência passa por quatro pontos, então os quatro subconjuntos de três pontos determinam a mesma circunferência. Há 14 circunferências que passam por quatro pontos:

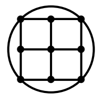
- 9 que passam por dois pontos numa linha horizontal e por dois pontos noutra linha horizontal



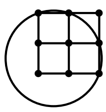
e as três obtidas por rotação



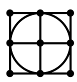
e as três obtidas por rotação



- 5 que passam por dois pontos numa linha horizontal e por um ponto em cada uma das outras linhas



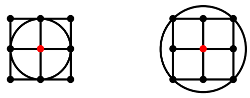
e as três obtidas por rotação



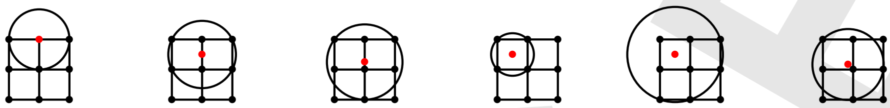
Assim, às $84-8=76$ circunferências têm que ser retiradas $3\times 14=42$ circunferências repetidas, pelo que há $76-42=34$ circunferências distintas.

Solução 2: O centro da circunferência pode estar no ponto central, num dos eixos de simetria ou fora dos eixos de simetria do quadriculado.

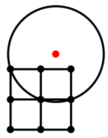
Há 2 circunferências cujo centro está no ponto central do quadriculado:



Há 24 circunferências cujo centro está num dos eixos de simetria do quadriculado, mas não no ponto central (as 6 indicadas a seguir e as 6×3 que se obtêm por rotação):



Há 8 circunferências cujo centro está fora dos eixos de simetria do quadriculado (a indicada a seguir e as 7 que se obtêm por rotações e reflexões):



Logo, ao todo há $2 + 24 + 8 = 34$ circunferências distintas.

4. Se dois deputados vizinhos têm o mesmo sentido de voto na ronda n, então em todas as rondas seguintes, ambos mantêm o seu sentido de voto. Portanto, designando por A_n o conjunto dos deputados que têm pelo menos um vizinho com o mesmo sentido de voto que o seu, conclui-se que $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq A_{n+2} \subseteq \cdots$.

   Como há um número ímpar de deputados na mesa circular, há pelo menos dois deputados, vizinhos um do outro, com o mesmo sentido de voto na ronda inicial. Portanto A_1 tem pelo menos 2 elementos.

   Se X e Y são deputados vizinhos tais que X não está em A_n e Y está em A_n, então, na ronda $n+1$, o deputado Y mantém o seu sentido de voto e o deputado X passa a votar da mesma forma que Y, pelo que X está em A_{n+1}.

   Se na ronda n, houver mais do que um deputado que não está em A_n, então há pelo menos dois deles nas condições anteriores. Se houver apenas um deputado que não está em A_n, então ele está em A_{n+1}.

   Assim, se houver a deputados fora de A_1, há no máximo $\lfloor a/2 \rfloor$ rondas até haver menos de dois elementos fora de A_n, caso em que A_{n+1} contém os 2013 deputados. Como $a \leq 2011$, e $\lfloor 2011/2 \rfloor + 1 = 1006$, então A_{1006} tem pelo menos 2012 deputados, A_{1007} tem os 2013 deputados e na ronda 1008 todos os deputados mantêm o seu sentido de voto. Logo, os deputados chegam a uma decisão no máximo na ronda 1008.

   No caso em que dois vizinhos têm inicialmente o mesmo sentido de voto e os restantes 2011 deputados têm inicialmente sentidos de voto alternados, então A_1 é composto por um único bloco de 2 deputados. A cada ronda subsequente esse bloco cresce um deputado para cada lado. Portanto, há 2012 deputados em A_{1006} e 2013 deputados em A_{1007}. Logo, neste caso, os deputados chegam a uma decisão na ronda 1008.