XXX OPM - Final - 2º Dia - 24.03.2012 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

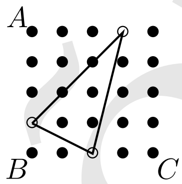
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2,3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Cada um dos 7 alunos do 5° ano pode jogar com cada um dos 4 alunos do 6° ano e com cada um dos 5 alunos do 7° ano. Cada um dos 4 alunos do 6° ano pode jogar com cada um dos 5 alunos do 7° ano. Portanto há $7 \times 4 + 7 \times 5 + 4 \times 5 = 83$ maneiras diferentes de organizar o jogo. Opção correta: D)

   (b) Como $5+5+8+8+13+13 = 52$, $8+8+8+8+8+13 = 53$, $5+5+5+13+13+13 = 54$ e $5+8+8+8+13+13 = 55$, então o número pretendido é o 51. Opção correta: A)

   (c) O quarto vértice tem de estar numa das três regiões fora do triângulo formado pelos vértices assinalados. Em cada região o vértice que maximiza a área é o que está mais afastado do lado correspondente. Na figura estes vértices estão indicados pelas letras A, B e C.



   As áreas dos quadriláteros formados a partir dos vértices A, B e C são, respetivamente, 9 cm^2, $5,5$ cm^2 e $8,5$ cm^2. Logo o Joaquim escolheu o vértice A. Opção correta: D)

   (d) Se o anel da esquerda for verde, podem não existir outros anéis verdes ou existir um anel verde, numa das restantes quatro posições. Neste caso, há 5 logotipos diferentes.

   Se o primeiro anel verde for o que está na segunda posição, podem não existir outros anéis verdes ou existir um anel verde, numa das restantes três posições. Neste caso, há 4 logotipos diferentes.

   Se o primeiro anel verde for o que está na terceira posição, podem não existir outros anéis verdes ou existir um anel verde, numa das restantes duas posições. Neste caso, há 3 logotipos diferentes.

   Se o primeiro anel verde for o que está na quarta posição, podem não existir outros anéis verdes ou existir um anel verde na quinta posição. Neste caso, há 2 logotipos diferentes.

   Há ainda um logotipo em que o primeiro anel verde é o que está na quinta posição, e um último logotipo, sem anéis verdes.

   Há assim, ao todo, $5+4+3+2+1+1 = 16$ logotipos diferentes (a contagem poderia ter sido efectuada de acordo com o número de anéis verdes e obter-se-iam 10 logotipos diferentes com dois anéis verdes, 5 logotipos diferentes com um anel verde e um logotipo sem anéis verdes).

   Como o 16° logotipo foi usado em 2012, então o primeiro foi usado em $2012 - 15 = 1997$. Opção correta: D)

5. Os palitos estão dispostos em três direções. Devido à simetria que existe entre as direções, basta contar o número de palitos dispostos horizontalmente. O cálculo desse número pode-se fazer do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9 = \\ =&2 \times (9+10+11+12+13+14+15+16+17)+18 = 252 \end{aligned}$$

   Logo o Dinis precisaria de $3 \times 252 = 756$ palitos para construir um hexágono de lado 9.

6. Se o número 1 e o número 2 forem escritos na mesma folha, então todos os restantes números estão também nessa folha. Há então, dois casos possíveis, consoante seja usada a folha azul ou a vermelha.

   Se o número 1 e o número 2 forem escritos em folhas distintas, então o número 3 pode ser colocado em qualquer uma das folhas. Se o 3 for colocado na folha do 1, então todos os restantes números são colocados nessa folha. Se o 3 for colocado na folha do 2, então também terão que ser colocados nessa folha os números 5, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, e os números que sobram (o 4 e o 6) não poderão por isso ser colocados na folha do 1; portanto, todos os números, exceto o 1, são colocados na folha do 2. Há então, quatro casos possíveis, nomeadamente, 1 e 3 na folha azul, 1 e 3 na folha vermelha, 2 e 3 na folha azul, 2 e 3 na folha vermelha.

   Ao todo, há portanto seis formas diferentes de escrever os números.