OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXX OPM - Final - 2º Dia - 24.03.2012 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja n um número entre 1 e 1000.

   Se $n \in [1, 7]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 1, que divide n.

   Se $n \in [8, 26]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 2, que divide n em 10 casos.

   Se $n \in [27, 63]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 3, que divide n em 13 casos.

   Se $n \in [64, 124]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 4, que divide n em 16 casos.

   Se $n \in [125, 215]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 5, que divide n em 19 casos.

   Se $n \in [216, 342]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 6, que divide n em 22 casos.

   Se $n \in [343, 511]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 7, que divide n em 25 casos.

   Se $n \in [512, 728]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 8, que divide n em 28 casos.

   Se $n \in [729, 999]$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 9, que divide n em 31 casos.

   Se $n = 1000$, então a parte inteira de $\sqrt[3]{n}$ é 10, que divide n.

   Há portanto $7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 1 = 172$ números entre 1 e 1000 divisíveis pela parte inteira da sua raiz cúbica.

5. Tem-se área$_{[ABJ]}$ $=$ área$_{[ABH]} \times \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BH}} =$ área$_{[ABC]} \times \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \times \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BH}}$ e

   $$\text{área}_{[CIJH]} = \text{área}_{[ACI]} - \text{área}_{[AHJ]} = \text{área}_{[ABC]} \times \frac{\overline{CI}}{\overline{CB}} - \text{área}_{[ABH]} \times \frac{\overline{HJ}}{\overline{BH}} =$$

   $$= \text{área}_{[ABC]} \times \left(\frac{\overline{CI}}{\overline{CB}} - \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{HJ}}{\overline{BH}}\right)$$

   Então área$_{[ABJ]}$ $=$ área$_{[CIJH]}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \times \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CB}} - \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \times \dfrac{\overline{HJ}}{\overline{BH}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CB}}$.

   Mas, como os lados de um losango são congruentes e, por outro lado, tem-se as semelhanças $[CBH] \sim [FBG]$ e $[ACI] \sim [AED]$, então $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = 1 - \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = 1 - \dfrac{\overline{CH}}{\overline{FG}} = 1 - \dfrac{\overline{CB}}{\overline{FB}} = \dfrac{\overline{FC}}{\overline{FB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{CB}}$, o que prova o pretendido.

6. Se uma folha contém os números a e b, e outra folha contém os números c e d, então o número $ac + bd$ tem que pertencer a ambas as folhas, o que é impossível. Portanto conclui-se que cada folha contém no máximo um número, exceto uma folha, que contém todos os restantes números. A esta folha chamar-se-á a folha *grande* e às restantes folhas *pequenas*.

   O número $2n - 2$ pode ficar isolado numa folha, se nas restantes $n - 2$ folhas pequenas ficarem os números de 1 a $n - 2$.

   Para mostrar que $2n - 2$ é o maior número que pode ficar isolado, suponhamos que o número $N > 2n - 2$ está numa das folhas pequenas.

   O número N pode ser decomposto numa soma de duas parcelas de pelo menos $n - 1$ formas diferentes, nomeadamente $1 + (N - 1), 2 + (N - 2), \ldots, (n - 1) + (N - (n - 1))$. Como N não está na folha grande, nenhum destes pares de parcelas está na folha grande. Assim, em cada par, há pelo um número numa folha pequena, o que é impossível, porque apenas há $n - 2$ folhas pequenas disponíveis.