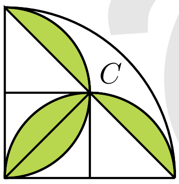
Cada questão vale 10 pontos

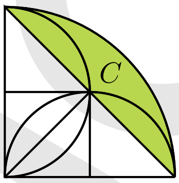
Sugestões para a resolução dos problemas

1. No conjunto de instruções dadas pelo pirata Barbacúbica, cada vez que damos passos para sul anulamos os passos dados para norte na instrução anterior, e damos mais um passo para sul. Assim, cada par de instruções do tipo "passos para norte seguidos de passos para sul" equivale a dar um passo para sul. No total temos 500 instruções que formam 250 pares do tipo "passos para norte seguidos de passos para sul". Portanto, o tesouro do pirata Barbacúbica encontra-se 250 passos a sul do grande farol.

2. Considere-se a seguinte construção onde M e N são os pontos médios de $[OA]$ e $[OB]$, respetivamente. Então $[OMCN]$ é um quadrado com 5 metros de lado.



Assim as quatro regiões sombreadas nesta figura são geometricamente iguais, já que são todas quartos de círculo de raio 5m aos quais subtraímos triângulos geometricamente iguais. Assim a área do terreno com orquídeas é igual à área a sombreado representada na figura seguinte.



Esta região é um quarto de círculo ao qual subtraímos o triângulo $[OAB]$ e como tal a sua área é $\frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 25\pi - 50$ m^2.

3. Seja x o número do andar da primeira paragem. Como x é a soma de 1 com o número do andar da segunda paragem, então a segunda paragem foi no andar $x-1$. Do mesmo modo, conclui-se que a terceira paragem foi no andar -1 e a quarta paragem foi no andar $-x$. Como $-x = 5$, ou seja, $x = -5$, então o elevador começou no andar 1 e foi parando nos andares $-5, -6, -1, 5, 6, 1$. Portanto, a paragem anterior a regressar ao primeiro andar foi no andar 6.

4. Como $2011 = 288 \times 2 + 287 \times 5$, então $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{288 \text{ fatores}} \times \underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{287 \text{ fatores}}$ é um padrinho de 2011 que termina em 287 zeros.

   Se existisse um padrinho n de 2011 que terminasse com mais de 287 zeros, então n teria pelo menos 288 fatores 2 e 288 fatores 5.

   Como $\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{a \text{ parcelas}} \leq 2^a$ e $\underbrace{5 + 5 + \cdots + 5}_{b \text{ parcelas}} \leq 5^b$, então a menor soma com estes fatores é obtida utilizando apenas as parcelas 2 e 5 (e não as suas potências de expoente superior a um). Como $288 \times 2 + 288 \times 5 = 2016 > 2011$, então n não pode ser padrinho de 2011.

   Assim, o número máximo de zeros com que pode terminar um padrinho de 2011 é 287.

SOLUÇÕES