XXVIII OPM - Final - 2º dia - 27.03.2010 - Categoria B - 10º/12º

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja m o mínimo múltiplo comum dos números em quaisquer dois vértices consecutivos. Se os números iniciais forem $2, 15, 10, 3, 30$, escritos por esta ordem, então $m = 30 = 2 \times 3 \times 5$.

   Suponha-se que há uma solução com $m < 30$. Claramente m tem dois factores primos distintos, pois se tivesse apenas um, os mínimos múltiplos comuns não seriam todos iguais. Logo $m = p^n q$, onde $n \leq 3$. Os divisores 1 e p^a, com $a < n$, não podem ser usados, porque nestes casos, ambos os números adjacentes teriam que ser $p^n q$. Por outro lado, se um divisor $p^a q$, com $a < n$, for usado, os números adjacentes têm que ser p^n e $p^n q$. Portanto só pode ser usado um divisor da forma $p^a q$, com $a < n$, pelo que não é possível preencher o pentágono.

5. Ordenemos os comprimentos dos lados do triângulo $x \leq y \leq z$.

   Se $\frac{z}{y} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, como $y \leq z$, temos $\frac{z}{y} \geq 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e portanto $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{z}{y} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

   Caso contrário, temos $z \geq y\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Por outro lado, como x, y e z formam um triângulo, temos obrigatoriamente $x + y > z$, porque a soma de dois dos lados de um triângulo tem de ser maior que o terceiro lado. Assim temos $x + y > z \geq y\frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x > y\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1\right) = y\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   Desta desigualdade obtemos $\frac{x}{y} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Como $x \leq y$, temos $\frac{x}{y} \leq 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e portanto $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{y}{x} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

6. Designe-se o ponto que está na linha i e coluna j do quadriculado por (i, j). Os p pontos podem ser escolhidos nas casas $(n, r_n)_{n=0,\ldots,p-1}$, onde r_n é o resto da divisão de n^2 por p. Considerem-se os pontos distintos $L = (l, r_l)$, $M = (m, r_m)$ e $N = (n, r_n)$ e mostre-se que não são colineares. Os declives das rectas que passam pelos pontos L e M e pelos pontos L e N são respectivamente

   $$\frac{m^2 - l^2 + kp}{m - l} \quad \text{e} \quad \frac{n^2 - l^2 + k'p}{n - l}.$$

   Se os três pontos forem colineares, então estes declives são iguais, ou seja, $(m^2 - l^2 + kp)(n - l) = (n^2 - l^2 + k'p)(m - l)$, donde se conclui que p divide $(m^2 - l^2)(n - l) - (n^2 - l^2)(m - l) = (m - l)(n - l)(m - n)$. Como as diferenças $m - l$, $n - l$ e $m - n$ estão entre $-p$ e p, e p é um número primo, então uma delas tem que ser nula, ou seja, os pontos L, M e N não são distintos.