OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVIII OPM - Final - 2º dia - 27.03.2010 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

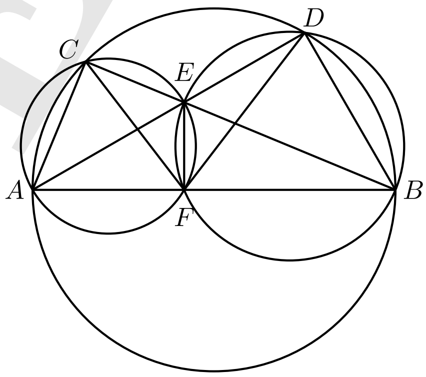
4. Para um rectângulo composto por $n \times m$ quadrados são necessárias $(n+1) \times (m+1)$ tachas. O número 2010 pode ser decomposto como um produto $(n+1) \times (m+1)$ das seguintes formas

$$2 \times 1005, 3 \times 670, 5 \times 402, 6 \times 335, 10 \times 201, 15 \times 134, 30 \times 67.$$

Assim, o maior rectângulo que a Diana pode formar tem $(30-1) \times (67-1) = 29 \times 66 = 1914$ quadrados.

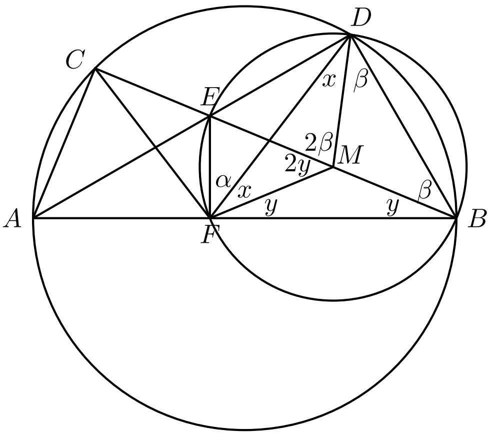
5. **Solução 1:**

O ângulo $\measuredangle ACE$ é recto, porque o triângulo $[ACB]$ está inscrito na circunferência de diâmetro $[AB]$. Como $\measuredangle AFE$ também é recto, o quadrilátero $[ACEF]$ está inscrito na circunferência de diâmetro $[AE]$. O arco $\widehat{CE}$ é subentendido pelos ângulos inscritos $\measuredangle CAE$ e $\measuredangle CFE$, donde $C\hat{A}E = C\hat{F}E$, pelo teorema do arco capaz. Do mesmo modo, conclui-se que $D\hat{B}E = D\hat{F}E$. O arco $\widehat{CD}$ é subentendido pelos ângulos inscritos $\measuredangle CAD$ e $\measuredangle DBC$, pelo que, novamente pelo teorema do arco capaz, tem-se $C\hat{A}E = D\hat{B}E$. Logo $C\hat{F}E = D\hat{F}E$.



Solução 2:

Os ângulos $\measuredangle ACB$ e $\measuredangle ADB$ são rectos, porque os triângulos $[ACB]$ e $[ADB]$ estão inscritos na circunferência de diâmetro $[AB]$. Logo, $C\hat{A}E + B\hat{A}D + A\hat{B}C = 90^o = E\hat{B}D + A\hat{B}C + B\hat{A}D$. Daqui se deduz a igualdade $C\hat{A}E = E\hat{B}D$.
Seja M o ponto médio de $[EB]$. Como $[EDB]$ e $[EFB]$ são triângulos rectângulos, estão ambos inscritos na circunferência de centro M e raio de comprimento $\overline{ME}$. Sejam $\alpha = D\hat{F}E$, $\beta = E\hat{B}D$, $x = D\hat{F}M$ e $y = M\hat{F}B$. Então $\alpha + x + y = 90^o$. Tem-se $B\hat{D}M = \beta$, pois $[BMD]$ é isósceles de base $[BD]$. Logo $E\hat{M}D = 180^o - (180^o - \beta - \beta) = 2\beta$. Do mesmo modo, $F\hat{B}M = y$ e $F\hat{M}E = 2y$. Somando os ângulos internos do triângulo $[DMF]$, que é isósceles de base $[DF]$, tem-se $2\beta + 2y + 2x = 180^o$, pelo que, $\beta + x + y = 90^o$. Assim, $\alpha = \beta$, ou seja, $D\hat{F}E = E\hat{B}D$.
De modo semelhante, mostra-se que $C\hat{A}E = C\hat{F}E$.
Logo $C\hat{F}E = C\hat{A}E = E\hat{B}D = D\hat{F}E$.



6. Seja m o mínimo múltiplo comum dos números em quaisquer dois vértices consecutivos. Se os números iniciais forem $2, 15, 10, 3, 30$, escritos por esta ordem, então $m = 30 = 2 \times 3 \times 5$.

Suponha-se que há uma solução com $m < 30$. Claramente m tem dois factores primos distintos, pois se tivesse apenas um, os mínimos múltiplos comuns não seriam todos iguais. Logo $m = p^n q$, onde $n \leq 3$. Os divisores 1 e p^a, com $a < n$, não podem ser usados, porque nestes casos, ambos os números adjacentes teriam que ser $p^n q$. Por outro lado, se um divisor $p^a q$, com $a < n$, for usado, os números adjacentes têm que ser p^n e $p^n q$. Portanto só pode ser usado um divisor da forma $p^a q$, com $a < n$, pelo que não é possível preencher o pentágono.