XXVIII OPM - Final - 1º dia - 26.03.2010 - Categoria B - 10º/12º

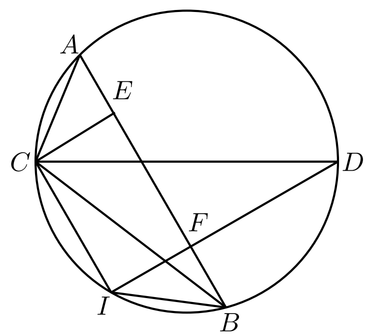
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam n o número de velas e x o número de horas que cada uma das velas dura. O número total de horas que as velas duram é $S = nx$. Ora, como no primeiro dia se gasta 1 destas horas, no segundo 2 e assim sucessivamente até ao dia n, temos que $S = 1+2+\ldots+n$. Logo $S = \frac{S+S}{2} = \frac{(1+2+\cdots+n)+(n+(n-1)+\cdots+1)}{2} = = \frac{(1+n)+(2+(n-1))+\cdots+(n+1))}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Temos então $x = \frac{S}{n} = \frac{n+1}{2}$. Como cada vela foi acesa um número inteiro de vezes durante uma hora de cada vez, x tem de ser um número inteiro, logo n não pode ser par.

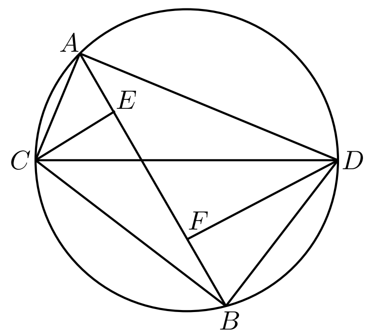
   Vejamos agora que para qualquer n ímpar, há um modo de acender as velas tal que ao fim dos n dias todas arderam o mesmo número de horas. Para $k = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, no dia k acendemos um qualquer conjunto de k velas e no dia $n-k$ acendemos as $n-k$ velas que não foram acesas no dia k. No dia n acendemos todas as velas. Assim,cada uma das velas foi acesa exactamente uma vez, ou no dia k, ou no dia $n-k$ e no último dia foram todas acesas. Concluímos que assim todas as velas foram acesas durante o mesmo tempo.

2. **Solução 1:**

   Considere-se o ponto I da recta DF que pertence à circunferência e é distinto de D. O ângulo $\measuredangle DIC$ é recto, uma vez que $[CD]$ é um diâmetro da circunferência. O quadrilátero $[CEFI]$ tem portanto três ângulos internos rectos, ou seja, $[CEFI]$ é um rectângulo. Em particular, $\overline{CE} = \overline{IF}$. Sendo as rectas CI e AB paralelas, tem-se $C\hat{B}A = I\hat{C}B$. Pelo teorema do arco capaz, $\widehat{AC} = C\hat{B}A = I\hat{C}B = \widehat{IB}$. Logo $\widehat{AI} = \widehat{AC} + \widehat{CI} = \widehat{IB} + \widehat{CI} = \widehat{CB}$. Novamente recorrendo ao teorema do arco capaz, conclui-se que os triângulos rectângulos $[ACE]$ e $[BIF]$ são semelhantes. Como $\overline{CE} = \overline{IF}$, deduz-se que são mesmo congruentes. Logo $\overline{BF} = \overline{AE} = 1$ cm.

   Solução 2:

   Tem-se $C\hat{D}A = C\hat{B}A$ pelo teorema do arco capaz, pelo que os triângulos rectângulos $[ADC]$ e $[EBC]$ são semelhantes. Como $C\hat{B}E = 90^o - F\hat{B}D = F\hat{D}B$, os triângulos rectângulos $[EBC]$ e $[FDB]$ são semelhantes. Portanto $[ADC]$ e $[FDB]$ são semelhantes. Logo

   $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CA}}. \tag{1}$$

   Do mesmo modo, os triângulos rectângulos $[DBC]$ e $[AEC]$ são semelhantes, e portanto

   $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{2}$$

   Comparando (1) e (2), conclui-se que $\overline{AE} = \overline{BF} = 1$ cm.

3. Sejam E o conjunto constituído pelos habitantes de Évora, n a cardinalidade de E e S_i, $i = 1, \ldots, 2010$, os subconjuntos de E que correspondem aos eborenses que comeram sericaia há i dias. O problema consiste em demonstrar que existe um subconjunto F de E com 10 elementos que intersecta todos os subconjuntos S_i.

Comecemos por verificar que existe um elemento de E que está em pelo menos 1006 dos subconjuntos S_i. De facto, se assim não fosse, a soma das cardinalidades dos conjuntos S_i seria menor ou igual a $n \times 1005$. Mas, como cada S_i tem mais de $\frac{n}{2}$ elementos, esta soma é maior de $\frac{n}{2} \times 2010 = n \times 1005$, levando a uma contradição. Escolhemos este elemento de E para F. Com um raciocício análogo, mostramos que existe um segundo elemento de E que está contido em pelo menos 503 dos 1004 restantes subconjuntos e escolhemos este segundo elemento de E para F. Prosseguimos sempre com o mesmo argumento para mostrar que existem:

- um terceiro elemento de E que está contido em pelo menos 251 dos 501 subconjuntos restantes,

- um quarto elemento de E que está contido em pelo menos 126 dos 250 subconjuntos restantes,

- um quinto elemento de E que está contido em pelo menos 63 dos 124 subconjuntos restantes,

- um sexto elemento de E que está contido em pelo menos 31 dos 61 subconjuntos restantes,

- um sétimo elemento de E que está contido em pelo menos 16 dos 30 subconjuntos restantes,

- um oitavo elemento de E que está contido em pelo menos 8 dos 14 subconjuntos restantes,

- um nono elemento de E que está contido em pelo menos 4 dos 6 subconjuntos restantes,

e, finalmente, que há um décimo elemento de E que está contido nos dois últimos subconjuntos. O conjunto F formado por estes 10 elementos satisfaz o enunciado.