OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXVII OPM - Final - 1º dia - 27.03.2009 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2,3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) A partir de cada vértice de um polígono regular de n lados saem $n-3$ diagonais, uma vez que se une este vértice aos restantes excepto ele próprio e os dois adjacentes. Assim, o dobro do número de diagonais é $n(n-3)$, uma vez que se contou cada diagonal duas vezes. Neste caso, tem-se $n(n-3) = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$. Da factorização apresentada facilmente se conclui que $n = 10$. Opção correcta: C).

   (b) Se o preço aumentou 25% é porque 20 gramas é um quarto do peso do novo tubo. Ou seja o tubo reduzido tem 80 gramas e o inicial teria 100 gramas. Opção correcta: A)

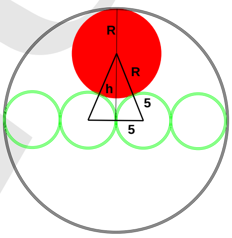
   (c) Seja l o lado do quadrado menor. A área do triângulo inscrito no quadrado é igual a $\frac{1}{2}$ m^2. Note-se que a área deste triângulo é igual à soma da área do quadrado mais pequeno com a soma das áreas de três triângulos mais pequenos. O triângulo que está por cima do quadrado pequeno tem base l e altura $1-l$. Os outros dois triângulos mais pequenos têm altura l e a soma das suas bases é $1-l$. Assim, tem-se

$$\frac{1}{2} = l^2 + \frac{l(1-l)}{2} + \frac{l(1-l)}{2},$$

   ou seja $l = \frac{1}{2}$. Logo, a área da nova porta é $\frac{1}{4}$ m^2. Opção correcta: A)

   (d) Uma vez que o número 4 aparece a seguir ao 11 os saltos não podem ter comprimento um. Se os saltos fossem de comprimento dois só os lugares pares ficariam com números e sabe-se que cada lugar do carrossel ficou com um único número. Se o salto tivesse comprimento três, o coelho teria colocado os números de 1 a 20 sucessivamente nos lugares $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 3, 6, 9, 12, 15, 18$. Observa-se assim que o número 4 foi colocado no lugar 10 e o número 11 no lugar 11, logo estão em posições consecutivas. Do outro lado do número 4 estará assim o número colocado na posição 9. Por consulta da lista apresentada conclui-se que é o número 17. Opção correcta: E)

2. Seja R o comprimento dos raios do círculo vermelho. Uma vez que o raio da circunferência mede 20, então os raios das circunferências verdes medem 5. O triângulo representado na figura, cujos vértices são o centro do círculo vermelho e de duas circunferências verdes, é isósceles.



Dois dos seus lados medem $R+5$ e o restante 10. Pelo Teorema de Pitágoras, conclui-se que a altura deste triângulo é

$$h = \sqrt{(R+5)^2 - 5^2} = \sqrt{R^2 + 10R}.$$

Por outro lado, note-se que $h + R = 20$, ou seja,

$$\sqrt{R^2 + 10R} + R = 20,$$

portanto $R = 8$ cm. Logo a área do círculo vermelho é 64π cm^2.

3. Para qualquer número natural n, tem-se $2009 \times n = 2000 \times n + 9 \times n$, por isso os dois últimos algarismos de $2009 \times n$ são os dois últimos algarismos de $9 \times n$. Por outro lado, se m é o número formado pelos dois últimos algarismos de n, então $n - m$ é múltiplo de 100 e os dois últimos algarismos de $9 \times n = 9 \times (n - m) + 9 \times m$ são os dois últimos algarismos de $9 \times m$. Assim, os dois últimos algarismos de 2009^n são os dois últimos algarismos de 9^n.

   Como os últimos dois algarismos das primeiras potências de base 9 são 09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, verifica-se que os dois últimos algarismos das potências de base 2009 se repetem de 10 em 10. Assim, para encontrar os últimos dois algarismos de $2009^{\left(2008^{2007}\right)}$ só precisamos de conhecer o último algarismo de 2008^{2007}.

   Usando o mesmo raciocínio, verifica-se que o último algarismo das potências de base 2008, que é o último algarismo das potências de base 8, se repete de 4 em 4, na sequência $8, 4, 2, 6, 8, \ldots$.

   Assim o último algarismo de 2008^{2007} é o mesmo que o último algarismo de 2008^3, ou seja, 2. Então os dois últimos algarismos de $2009^{\left(2008^{2007}\right)}$ são os dois últimos algarismos de 2009^2, ou seja, 81.