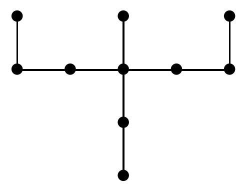
XXVI OPM - Final - 1º dia - 14.03.2008 - Categoria B

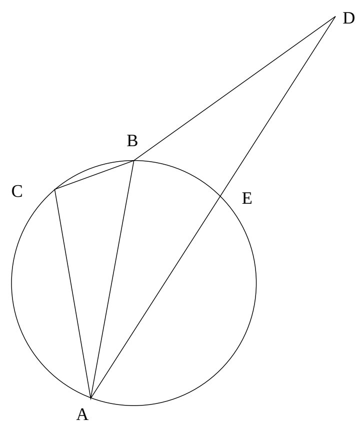
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Qual o número máximo de triângulos com vértices nos pontos da figura que é possível construir?



2. Na figura seguinte, o triângulo $[ABC]$ está inscrito na circunferência, E pertence à circunferência, D pertence à semi-recta $\dot{A}E$ e $C\hat{A}B = B\hat{A}E$. Prova que $\overline{AB} = \overline{BD}$ se e somente se $\overline{DE} = \overline{AC}$.



3. Seja d um número natural. Dados dois números naturais M e N com d algarismos, M é amigo de N se os d números obtidos substituindo cada um dos algarismos de M pelo algarismo de N que se encontra na mesma posição são todos múltiplos de 7. Determina os valores de d para os quais é válida a seguinte condição:

   Para quaisquer dois números M e N com d algarismos, se M é amigo de N, então N é amigo de M.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. O Nelson desafia a Telma para o seguinte jogo:

   Primeiro a Telma retira 2^9 números do conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., 1024\}$, em seguida o Nelson retira 2^8 números dos restantes. Depois a Telma retira 2^7 números e assim sucessivamente, até restarem apenas 2 números. O Nelson terá de dar à Telma a diferença entre estes dois números em euros. Qual é a maior quantia que a Telma pode ganhar independentemente da estratégia do Nelson?

5. Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em A, tal que $\overline{AB} < \overline{AC}$. Seja M o ponto médio de $[BC]$ e D o ponto de intersecção de $[AC]$ com a recta perpendicular a $[BC]$ que passa por M. Seja E o ponto de intersecção da recta paralela a $[AC]$ que passa por M com a recta perpendicular a $[BD]$ que passa por B. Prova que os triângulos $[AEM]$ e $[MCA]$ são semelhantes se e somente se $A\hat{B}C = 60^{\text{o}}$.

6. Seja n um número natural superior a 2. A Vanessa tem n montes de pedras de jade, todos os montes com números diferentes de pedras. A Vanessa consegue distribuir as pedras de qualquer um dos montes pelos outros montes e ficar com $n-1$ montes com igual número de pedras. Também consegue distribuir as pedras de quaisquer dois montes pelos outros montes e ficar com $n-2$ montes com igual número de pedras. Determina o menor número possível de pedras de jade que pode ter o monte com o maior número de pedras?

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Dado um conjunto com n elementos, o números de subconjuntos com três elementos é $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, que é representado por $\dbinom{n}{3}$. De facto, se escolhermos o primeiro elemento entre n, o segundo entre $n-1$ e o terceiro entre $n-2$, constroem-se $n(n-1)(n-2)$ subconjuntos, sendo que cada subconjunto se repete $3 \times 2 = 6$ vezes.

   O número total de triângulos e triângulos degenerados (aqueles em que o comprimento de um dos lados é igual à soma dos comprimentos dos restantes dois) que se pode construir com vértices nos pontos da figura é

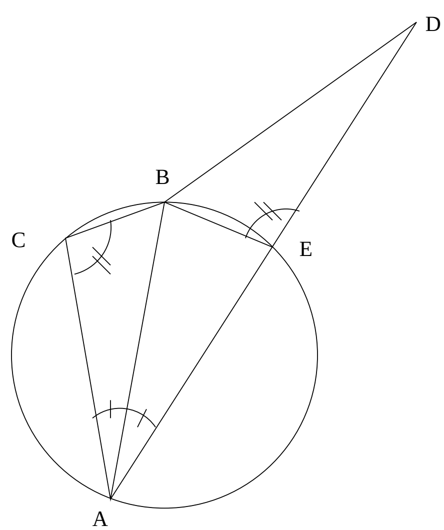
$$\binom{10}{3} = 120.$$

   O número de triângulos degenerados que se pode construir com vértices nos pontos da figura é igual a

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + 3 = 17.$$

   Portanto, o número de triângulos (não degenerados) que se pode construir com vértices nos pontos da figura é igual a $120 - 17 = 103$.

2. Pelo Teorema do arco capaz, tem-se $A\hat{C}B = 180^{\text{o}} - A\hat{E}B = D\hat{E}B$ logo, $D\hat{E}B = A\hat{C}B$. Também $\overline{EB} = \overline{CB}$, pois são cordas da circunferência definidas por ângulos de igual amplitude.



   Se $\overline{DE} = \overline{AC}$ então os triângulos $[EDB]$ e $[CAB]$ são congruentes, pois têm um ângulo igual e os dois lados que o definem iguais. Portanto, $\overline{BD} = \overline{AB}$.

   Se $\overline{AB} = \overline{BD}$, então o triângulo $[ABD]$ é isósceles com $B\hat{A}D = A\hat{D}B$ e, consequentemente, $C\hat{A}B = B\hat{D}E$. Portanto, os triângulos $[EDB]$ e $[CAB]$ são congruentes e, consequentemente, $\overline{DE} = \overline{AC}$.

3. Sejam $M = a_1a_2 \ldots a_d$ e $N = b_1b_2 \ldots b_d$ dois números com d algarismos, escritos pelos seus algarismos. Observe-se que, se M é amigo de N, então os números $M_1 = b_1a_2 \ldots a_d, M_2 = a_1b_2a_3 \ldots a_d, \ldots, M_d = a_1a_2 \ldots a_{d-1}b_d$ são todos múltiplos de 7. Assim, a soma $S = M_1 + \ldots + M_d = (d-1)M + N$ é também múltipla de 7.

Além disso, se $N_i = b_1 \ldots b_{i-1}a_ib_{i+1} \ldots b_d$, para $i = 1, \ldots, d$, tem-se $M_i + N_i = M + N$. Como M_i é múltiplo de 7, vem que N_i é múltiplo de 7 exactamente quando $M + N$ é múltiplo de 7.

Suponha-se que $d = 7k + 2$, para k inteiro. Então, se M é amigo de N, tem-se que

$$M + N = (7k+1)M + N - 7kM = (d-1)M + N - 7kM = S - 7kM$$

é múltiplo de 7, logo, todos os N_i são múltiplos de 7,$i = 1, \ldots, d$, ou seja, N é amigo de M.

Observe-se que dado um número M com d algarismos existe um número N com d algarismos tal que M é amigo de N. De facto, se se substituir um determinado algarismo de M por cada um dos algarismos de 0 a 9 e se dividir os números resultantes por sete, obtêm-se todos os restos de 0 a 6, pelo que, para um determinado algarismo, o número será múltiplo de 7. Repetindo este processo para cada algarismo de M, obtém-se um número N tal que M é amigo de N.

Suponha-se que é válida a condição indicada para um número natural d. Escolha-se M de d algarismos tal que M não é múltiplo de 7. Seja N um número com d algarismos tal que M é amigo de N. Então, $M + N$ é múltiplo de 7 logo, a diferença $S - (M + N) = (d-1)M + N - (M + N) = (d-2)M$ também é múltipla de 7. Como 7 é primo e M não é múltiplo de 7, então $d - 2$ é múltiplo de 7, ou seja, $d = 7k + 2$.

Portanto, os valores de d para os quais é válida a condição indicada são os números naturais da forma $7k + 2$, para k inteiro.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXVI OPM - Final - 2º dia - 15.03.2008 - Categoria B

Duração: 3 horas

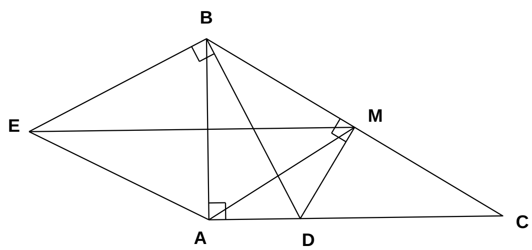
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. A Telma consegue garantir pelo menos 32 euros. Para isso, apenas necessita de, em cada jogada, retirar os números que estão numa posição par quando estes estão por ordem crescente. De facto, com esta estratégia, a distância mínima entre dois números do conjunto é pelo menos duplicada em cada jogada, pelo que ao fim das cinco jogadas da Telma, esta distância é no mínimo $2^5 = 32$.

   O Nelson consegue evitar pagar mais de 32 euros. Para isso, apenas necessita de, em cada jogada, retirar todos os números do início, ou todos os números do final, ficando com aqueles cuja distância máxima é menor. De facto, com esta estratégia, a distância máxima entre dois números do conjunto é pelo menos dividida por dois em cada jogada, pelo que ao fim das cinco jogadas do Nelson, esta distância é no máximo $1024/(2^5) = 32$.

5. Comece-se por notar que $[AEB]$ é isósceles, pois EM é perpendicular a AB e M é ponto médio de $[CB]$, logo $E\hat{A}B = E\hat{B}A = 90^{\text{o}} - A\hat{B}D = A\hat{D}B$.



   Por outro lado, $D\hat{M}B + B\hat{A}D = 180^{\text{o}}$, logo o quadrilátero $[DMBA]$ é cíclico e, consequentemente, $A\hat{D}B = A\hat{M}B$, ou seja, $E\hat{A}B = A\hat{M}B$.

   O ponto M é o centro da circunferência circunscrita a $[ABC]$, logo, $\overline{AM} = \overline{BM}$ e $M\hat{A}B = A\hat{B}M = A\hat{B}C$. Assim, $2A\hat{B}C + E\hat{A}B = 180^{\text{o}}$. Mas os triângulos $[AEM]$ e $[MCA]$ são semelhantes se e somente se AE e CM são paralelas, ou seja, $E\hat{A}B = A\hat{B}C$. Substituindo na equação acima vem $A\hat{B}C = 60^{\text{o}}$.

6. Sejam $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n$ os números de pedras dos diversos montes e $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

   Por um lado, $S \leq a_1 + (a_1 - 1) + (a_1 - 2) + \ldots + (a_1 - (n-1)) = \dfrac{(2a_1 - (n-1))n}{2}$.

   Por outro lado, se se distribui qualquer um dos montes pelos restantes $n-1$ montes, desde que não se escolha o monte com a_1 pedras, conclui-se que $S \geq (n-1)a_1$. Logo,

$$\frac{(2a_1 - (n-1))n}{2} \geq (n-1)a_1 \Rightarrow a_1 \geq \frac{(n-1)n}{2}$$

   e, consequentemente, $S \geq \dfrac{(n-1)^2 n}{2}$, ou seja, $S = \dfrac{(n-1)^2 n}{2} + k$, $k \geq 0$.

   Além disso, como as S pedras podem ser distribuídas por $n-1$ montes com igual número de pedras e ainda por $n-2$ montes com igual número de pedras, S é divisível por $n-1$ e por $n-2$, ou seja, é divisível por $(n-1)(n-2)$ (visto que $n-1$ e $n-2$ são primos entre si).

   Considerem-se os dois casos seguintes:

   - Seja n um número ímpar. Tem-se

$$S = \frac{(n-1)^2 n}{2} + k = \frac{(n-1)^2(n-2)}{2} + (n-1)(n-2) + n - 1 + k,\ k \geq 0.$$

Como as duas primeiras parcelas da expressão acima indicada são divisíveis por $(n-1)(n-2)$, também $n-1+k$ é divisível por $(n-1)(n-2)$. Em particular, k é divisível por $n-1$, ou seja, $k = m(n-1)$ para algum $m \geq 0$. Então $n-1+k = (n-1)(m+1)$ e concluiu-se que $m+1$ é divisível por $n-2$. Assim, $m+1 \geq n-2$, $m \geq n-3$, $k \geq (n-3)(n-1)$ e $S \geq \frac{(n-1)^2 n}{2} + (n-3)(n-1) = \frac{(n-1)^2 n}{2} + (n-4)n + 3$.
Portanto, $\frac{(2a_1 - (n-1))n}{2} > \frac{(n-1)^2 n}{2} + (n-4)n$, logo, $a_1 > \frac{(n-1)n}{2} + n - 4$, ou seja,

$$a_1 \geq \frac{(n-1)n}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Além disso, existe uma distribuição de pedras por n montes tal que

$$a_1 = \frac{(n-2)(n+3)}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{(n-1)^2 n}{2} + (n-4)n + 3 = \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{2}$$

que satisfaz as condições do enunciado. Basta observar que, para os valores de a_1 e S indicados, se verificam as igualdades $S = (n-1)a_1 = (n-2)\left[a_1 + \frac{n+3}{2}\right] = na_1 - a_1$ e $a_1 = \frac{(n+1)n}{2} - 3 = (1 + 2 + \ldots + n) - 3$ e escolher a distribuição

$$a_2 = a_1 - 1, a_3 = a_1 - 2, a_4 = a_1 - 4, a_5 = a_1 - 5, \ldots a_{n-1} = a_1 - (n-1), , a_n = a_1 - n.$$

Portanto, o menor valor possível para a_1 é $\frac{(n-2)(n+3)}{2}$.

- Seja $n = 2l$ um número par. Tem-se

$$S = \frac{(n-1)^2 n}{2} + k = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + k, \ k \geq 0.$$

Como as duas primeiras parcelas da expressão acima indicada são divisíveis por $(n-1)$, k é divisível por $n-1$, ou seja, $k = m(n-1)$ para algum $m \geq 0$. Então

$$S = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n+2m)(n-1)}{2}.$$

Como a primeira parcela da expressão acima indicada é divisível por $(n-1)(n-2)$, também a segunda parcela é divisível por $(n-1)(n-2)$. Então $n+2m$ é divisível por $n-2$. Em particular, $\frac{n+2m}{2} \geq n-2$, $m \geq \frac{n}{2} - 2$, $k \geq \frac{(n-1)(n-4)}{2}$ e $S \geq \frac{(n-1)^2 n}{2} + \frac{(n-1)(n-4)}{2} = \frac{(n-1)(n^2-4)}{2}$.
Portanto, $\frac{(2a_1 - (n-1))n}{2} \geq \frac{(n-1)(n^2-4)}{2}$, logo, $a_1 \geq \frac{n^2-4}{2} - \frac{n-4}{2n}$, o que implica que $a_1 \geq \frac{n^2-4}{2}$.
Além disso, existe uma distribuição de pedras por n montes tal que

$$a_1 = \frac{n^2-4}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{(n-1)(n^2-4)}{2}$$

que satisfaz as condições do enunciado. Basta observar que, para os valores de a_1 e S indicados, se verificam as igualdades $S = (n-1)a_1 = (n-2)\left[a_1 + \frac{n+2}{2}\right] = na_1 - a_1$ e $a_1 = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n-4}{2} = (1 + 2 + \ldots + n) - \frac{n-4}{2}$ e escolher a distribuição

$$a_2 = a_1 - 1, a_3 = a_1 - 2, \ldots, a_{l-2} = a_1 - (l-3), a_{l-1} = a_1 - (l-1), \ldots, a_{n-1} = a_1 - (n-1), a_n = a_1 - n.$$

Portanto, o menor valor possível para a_1 é $\frac{n^2}{2} - 2$.