Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXVI OPM - 2ª Eliminatória - 9.1.2008 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como $\lfloor x \rfloor$ e $\lfloor y \rfloor$ são inteiros, então $\lfloor x \rfloor^2$ e $\lfloor y \rfloor^2$ são quadrados perfeitos. A soma de dois quadrados perfeitos é 4 se e somente se um deles é 0 e o outro é 4.

   Assim, o conjunto dos pontos (x, y) do plano que verificam $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 4$ é a reunião do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor^2 = 4 \text{ e } \lfloor y \rfloor^2 = 0\}$ com o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor^2 = 0 \text{ e } \lfloor y \rfloor^2 = 4\}$.

   Por sua vez, $A = A_1 \cup A_2$, onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor = 2 \text{ e } \lfloor y \rfloor = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x < 3 \text{ e } 0 \leq y < 1\}, \end{aligned}$$

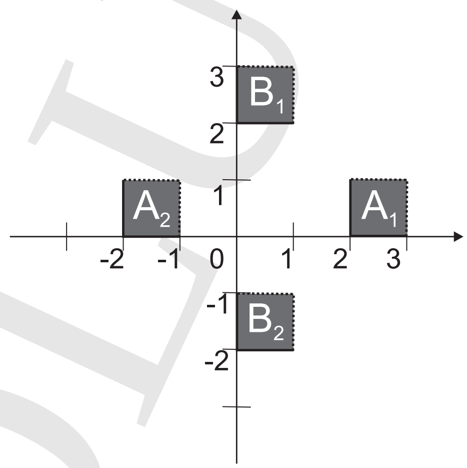
$$\begin{aligned} A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor = -2 \text{ e } \lfloor y \rfloor = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x < -1 \text{ e } 0 \leq y < 1\} \end{aligned}$$

   e $B = B_1 \cup B_2$, onde

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor = 0 \text{ e } \lfloor y \rfloor = 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ e } 2 \leq y < 3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lfloor x \rfloor = 0 \text{ e } \lfloor y \rfloor = -2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ e } -2 \leq y < -1\}\ . \end{aligned}$$

   Portanto, o conjunto dos pontos do plano é a reunião dos conjuntos A_1, A_2, B_1 e B_2 representada na figura



2. Sejam $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, todos distintos. Se a distribuição dos números pelos quadrados da base da torre for $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i$, então

   a segunda linha tem os números: $ab,\quad bc,\quad cd,\quad de,\quad ef,\quad fg,\quad gh,\quad hi,$

   a terceira linha tem os números: $ab^2c,\quad bc^2d,\quad cd^2e,\quad de^2f,\quad ef^2g,\quad fg^2h,\quad gh^2i,$

   a quarta linha tem os números: $ab^3c^3d,\quad bc^3d^3e,\quad cd^3e^3f,\quad de^3f^3g,\quad ef^3g^3h,\quad fg^3h^3i,$

   a quinta linha tem os números: $ab^4c^6d^4e,\quad bc^4d^6e^4f,\quad cd^4e^6f^4g,\quad de^4f^6g^4h,\quad ef^4g^6h^4i,$

a sexta linha tem os números: $ab^5c^{10}d^{10}e^5f$, $bc^5d^{10}e^{10}f^5g$, $cd^5e^{10}f^{10}g^5h$, $de^5f^{10}g^{10}h^5i$,

a sétima linha tem os números: $ab^6c^{15}d^{20}e^{15}f^6g$, $bc^6d^{15}e^{20}f^{15}g^6h$, $cd^6e^{15}f^{20}g^{15}h^6i$,

a oitava linha tem os números: $ab^7c^{21}d^{35}e^{35}f^{21}g^7h$, $bc^7d^{21}e^{35}f^{35}g^{21}h^7i$.

O número do quadrado do topo da torre é $ab^8c^{28}d^{56}e^{70}f^{56}g^{28}h^8i$. Este número é tanto menor quanto maiores forem as bases das potências de menor expoente, ou seja,

$$a=9,\ i=8 \quad \text{ou} \quad a=8,\ i=9,$$

$$b=7,\ h=6 \quad \text{ou} \quad b=6,\ h=7,$$

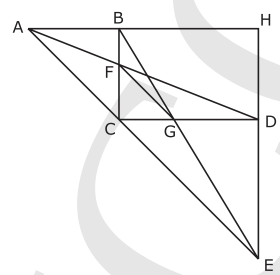
$$c=5,\ g=4 \quad \text{ou} \quad c=4,\ g=5,$$

$$d=3,\ f=2 \quad \text{ou} \quad d=2,\ f=3,$$

$$e=1.$$

Portanto, é possível distribuir os nove números pelos quadrados da base da torre de $2^4=16$ maneiras distintas, de modo a obter o menor número possível no quadrado do topo da torre.

3. **Solução 1:** Considera o ponto H tal que $[BHDC]$ é um rectângulo.



Por um lado, os triângulos $[AHD]$ e $[DCF]$ são semelhantes, logo,

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AH}},$$

ou seja, $\overline{FC}=\dfrac{\overline{CD}\times\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{CD}}$.

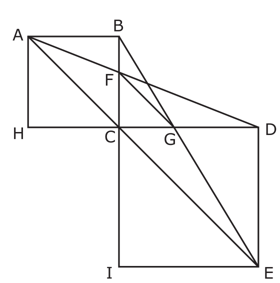
Por outro lado, os triângulos $[BHE]$ e $[GCB]$ são semelhantes, logo,

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EH}},$$

ou seja, $\overline{CG}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{CD}}{\overline{BC}+\overline{DE}}$.

Portanto, $\overline{FC}=\overline{CG}$, o triângulo $[CFG]$ é isósceles e a amplitude de $\measuredangle CFG$ é 45^o.

Solução 2: Considera os pontos H e I tais que $[ABCH]$ e $[CDEI]$ são quadrados.



Por um lado, os triângulos $[ADH]$ e $[FDC]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HD}},$$

ou seja, $\overline{FC} = \dfrac{\overline{CD} \times \overline{BC}}{\overline{BC} + \overline{CD}}$.

Por outro lado, os triângulos $[BEI]$ e $[BGC]$ são semelhantes, logo,

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{IE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BI}},$$

ou seja, $\overline{CG} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{CD}}{\overline{BC} + \overline{CD}}$.

Portanto, $\overline{FC} = \overline{CG}$, o triângulo $[CFG]$ é isósceles e a amplitude de $\measuredangle CFG$ é 45^o.

4. Sendo a e b números triangulares tem-se

$$b - a = \frac{m(m+1) - n(n+1)}{2} = \frac{(m-n)(m+n+1)}{2},$$

para algum par de inteiros positivos (n, m). O número de pares (a, b) tais que $b - a = 2008$ é igual ao número de pares de inteiros positivos (n, m) tais que

$$(m-n)(m+n+1) = 2 \times 2008 = 2^4 \times 251.$$

Uma vez que os números $m - n$ e $m + n - 1$ têm paridades diferentes e $m + n + 1 > m - n$, tem-se $m - n = 1$ e $m + n + 1 = 2^4 \times 251$ ou $m - n = 2^4$ e $m + n + 1 = 251$, donde se obtém $m = 2008$ e $n = 2007$ ou $m = 133$ e $n = 117$, respectivamente. Portanto, existem dois pares (a, b) de números triangulares que satisfazem a condição $b - a = 2008$: $\left(\dfrac{2007 \times 2008}{2}, \dfrac{2008 \times 2009}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{117 \times 118}{2}, \dfrac{133 \times 134}{4}\right)$.