Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXVI OPM - 2ª Eliminatória - 9.1.2008 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. As parcelas do numerador admitem as factorizações

$$\begin{aligned}
1\times 2\times 4 &= (1\times 2\times 4)\times 1\\
2\times 4\times 8 &= (1\times 2\times 4)\times 2^3\\
3\times 6\times 12 &= (1\times 2\times 4)\times 3^3\\
\vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots\\
2008\times 4016\times 8032 &= (1\times 2\times 4)\times 2008^3
\end{aligned}$$

e as parcelas do denominador as factorizações

$$\begin{aligned}
1\times 3\times 9 &= (1\times 3\times 9)\times 1\\
2\times 6\times 18 &= (1\times 3\times 9)\times 2^3\\
3\times 9\times 27 &= (1\times 3\times 9)\times 3^3\\
\vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots\\
2008\times 6024\times 18072 &= (1\times 3\times 9)\times 2008^3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12+\cdots+2008\times 4016\times 8032}{1\times 3\times 9+2\times 6\times 18+3\times 9\times 27+\cdots+2008\times 6024\times 18072}\\
&\quad = \frac{1\times 2\times 4\times(1+2^3+3^3+\cdots+2008^3)}{1\times 3\times 9\times(1+2^3+3^3+\cdots+2008^3)} = \frac{1\times 2\times 4}{1\times 3\times 9} = \frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

2. Observe-se que $4\times L<10$, portanto, $L=1$ ou $L=2$. Como o algarismo das unidades de $4\times F$ é L e nenhum múltiplo de 4 tem o algarismo das unidades igual a 1, então $L=2$:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & I & C & A & F\\
 & & & \times & 4\\
\hline
F & A & C & I & 2
\end{array}$$

Uma vez que o algarismo das unidades de $4\times F$ é 2, tem-se $F=3$ ou $F=8$. No entanto, como F é maior ou igual a $4\times 2=8$, tem-se $F=8$:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & I & C & A & 8\\
 & & & \times & 4\\
\hline
8 & A & C & I & 2
\end{array}$$

Agora, como $4\times I<10$, I é diferente de L e $L=2$, conclui-se que $I=0$ ou $I=1$. Mas o algarismo das unidades de $4\times A+3$ é I, sendo por isso I ímpar. Assim $I=1$:

$$\begin{array}{ccccc}
2 & 1 & C & A & 8\\
 & & & \times & 4\\
\hline
8 & A & C & 1 & 2
\end{array}$$

Uma vez que o algarismo das unidades de $4 \times A + 3$ é 1, tem-se $A = 2$ ou $A = 7$. Como A é diferente de L e $L = 2$, conclui-se que $A = 7$:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & C & 7 & 8 \\ & & & \times & 4 \\ \hline 8 & 7 & C & 1 & 2 \end{array}$$

Finalmente, como $4 \times C + 3$ é da forma $30 + C$, obtém-se $C = 9$:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 9 & 7 & 8 \\ & & & \times & 4 \\ \hline 8 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

3. Sejam $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, todos distintos. Se a distribuição dos números pelos quadrados da base da torre for $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i$, então

a segunda linha tem os números: $ab,\quad bc,\quad cd,\quad de,\quad ef,\quad fg,\quad gh,\quad hi,$

a terceira linha tem os números: $ab^2c,\quad bc^2d,\quad cd^2e,\quad de^2f,\quad ef^2g,\quad fg^2h,\quad gh^2i,$

a quarta linha tem os números: $ab^3c^3d,\quad bc^3d^3e,\quad cd^3e^3f,\quad de^3f^3g,\quad ef^3g^3h,\quad fg^3h^3i,$

a quinta linha tem os números: $ab^4c^6d^4e,\quad bc^4d^6e^4f,\quad cd^4e^6f^4g,\quad de^4f^6g^4h,\quad ef^4g^6h^4i,$

a sexta linha tem os números: $ab^5c^{10}d^{10}e^5f,\quad bc^5d^{10}e^{10}f^5g,\quad cd^5e^{10}f^{10}g^5h,\quad de^5f^{10}g^{10}h^5i,$

a sétima linha tem os números: $ab^6c^{15}d^{20}e^{15}f^6g,\quad bc^6d^{15}e^{20}f^{15}g^6h,\quad cd^6e^{15}f^{20}g^{15}h^6i,$

a oitava linha tem os números: $ab^7c^{21}d^{35}e^{35}f^{21}g^7h,\quad bc^7d^{21}e^{35}f^{35}g^{21}h^7i.$

O número do quadrado do topo da torre é $ab^8c^{28}d^{56}e^{70}f^{56}g^{28}h^8i$. Este número é tanto menor quanto maiores forem as bases das potências de menor expoente, ou seja,

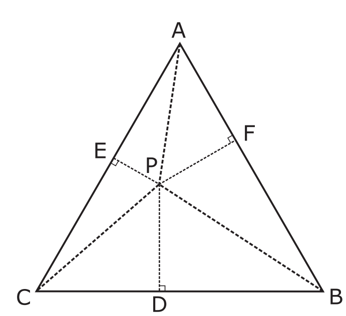
$$a = 9,\ i = 8 \quad \text{ou} \quad a = 8,\ i = 9,$$
$$b = 7,\ h = 6 \quad \text{ou} \quad b = 6,\ h = 7,$$
$$c = 5,\ g = 4 \quad \text{ou} \quad c = 4,\ g = 5,$$
$$d = 3,\ f = 2 \quad \text{ou} \quad d = 2,\ f = 3,$$
$$e = 1.$$

Assim, uma possível distribuição dos nove números pelos quadrados da base da torre que permite obter o menor número possível no quadrado do topo é

$$9 \qquad 7 \qquad 5 \qquad 3 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8.$$

4. O triângulo $[ABC]$ é equilátero de lado 1. Por aplicação do Teorema de Pitágoras, conclui-se que a sua altura mede $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e a sua área é $\frac{1 \times \sqrt{3}/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Por outro lado, a área do triângulo $[ABC]$ é a soma das áreas dos triângulos $[PAB]$, $[PBC]$ e $[PCA]$. Uma das bases de cada um destes triângulos é um dos lados de $[ABC]$ e a altura relativa a essa base é $[PF]$, $[PD]$ e $[PE]$, respectivamente.



Assim, tem-se

$$\text{área } [ABC] = \frac{\overline{AB} \times \overline{PF}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{PD}}{2} + \frac{\overline{AC} \times \overline{PE}}{2} = \frac{\overline{PF} + \overline{PD} + \overline{PE}}{2}$$

e, como a área de $[ABC]$ é $\frac{\sqrt{3}}{4}$, conclui-se que

$$\overline{PF} + \overline{PD} + \overline{PE} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$