XXIX OPM - Final - 2º Dia - 09.04.2011 - Categoria B - 10º/12º

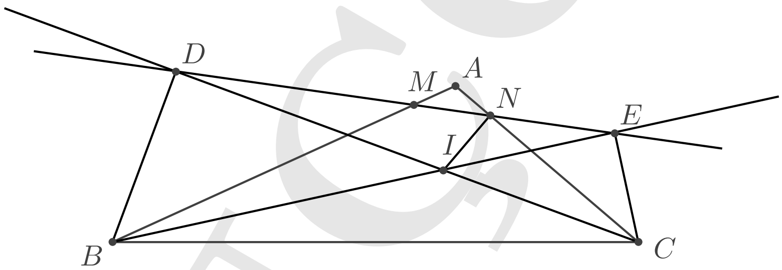
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Observe-se que, cada rapaz respondeu quantos colegas tinham o mesmo primeiro nome e quantos colegas tinham o mesmo sobrenome, por isso, há 7, 6 e 5 rapazes com o mesmo primeiro nome ou com o mesmo sobrenome. Denomine-se por A, B e C, respectivamente, os conjuntos constituídos por estes rapazes.

   A soma de elementos destes três conjuntos é $7+6+5=18$, mas apenas foram questionados 14 rapazes, por isso, existem 4 rapazes que pertencem às intersecções $A \cap B$, $B \cap C$ ou $A \cap C$. Pelo Princípio da Gaiola de Pombos, pode concluir-se que, pelo menos 2 rapazes pertencem a uma destas intersecções. Estes dois rapazes têm o mesmo nome e o mesmo sobrenome.

5. Sejam M e N os pontos de intersecção da recta DE com os lados $[AB]$ e $[AC]$, respectivamente, do triângulo $[ABC]$. O ponto I, intersecção das bissectrizes do triângulo, é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Uma vez que $\angle BDC$ e $\angle BEC$ são rectos, o quadrilátero $[BDEC]$ está inscrito numa circunferência (é cíclico). Pelo teorema do arco capaz, $\angle DEB \cong \angle DCB$, mas como DC é a mediatriz de $\angle ACB$, tem-se $\angle DEB \cong \angle ACD$. Assim, no quadrilátero $[NECI]$, $\angle NEI \cong \angle NCI$, logo este quadrilátero também é cíclico. De novo pelo teorema do arco capaz, $\angle INC$ é recto, ou seja, N é o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$ com o lado $[AC]$. De forma análoga se podia demonstrar que MI é perpendicular ao lado $[AB]$.



6. Se um número natural n se escreve como soma de um número ímpar $2k+1$ de naturais consecutivos, então

$$n = (a-k)+(a-k+1)+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+k-1)+(a+k) = a(2k+1),$$

   logo $2k+1$ é um divisor ímpar de n.

   Se um número natural n se escreve como soma de um número par $2k$ de naturais consecutivos, então

$$n = a+a+1+\cdots+(a+k-1)+(a+k)+\cdots+(a+2k-2)+(a+2k-1) = (2a+2k-1)k,$$

   logo $2a+2k-1$ é um divisor ímpar de n.

   Portanto, se um número natural pode ser escrito como soma de dois ou mais números naturais consecutivos, tem necessariamente um divisor ímpar.

   Por outro lado, se um número natural n tiver um divisor ímpar $2k+1$, então

$$n = (2k+1)a = (a-k)+(a-k+1)+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+k-1)+(a+k).$$

   Se $a-k<0$, podemos eliminar da soma anterior as parcelas $a-k, a-k+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-a-1, k-a$, cuja soma é 0, e tem-se

$$n = (k-a+1)+(k-a+2)+\cdots+(a+k-1)+(a+k),$$

   ou seja, n pode ser escrito como soma de dois ou mais números naturais consecutivos.

   Logo os números naturais que não podem ser escritos como soma de dois ou mais números naturais consecutivos são aqueles que não têm nenhum divisor ímpar, ou seja, as potências de 2.