

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.*

4. Numa turma com 14 rapazes, perguntou-se a cada um deles quantos colegas tinham o mesmo primeiro nome e quantos colegas tinham o mesmo último apelido que eles. Nas respostas apareceram os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Prova que há dois colegas com o mesmo primeiro nome e com o mesmo último apelido.
5. Seja $[ABC]$ um triângulo, D a projecção ortogonal de B sobre a bissectriz de $\angle ACB$ e E a projecção ortogonal de C sobre a bissectriz de $\angle ABC$. Prova que DE intersecta os lados $[AB]$ e $[AC]$ nos pontos de tangência da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$.
6. O número 1000 pode ser escrito como soma de 16 números naturais consecutivos: $1000 = 55 + 56 + \dots + 70$. Determina todos os números naturais que não podem ser escritos como soma de dois ou mais números naturais consecutivos.