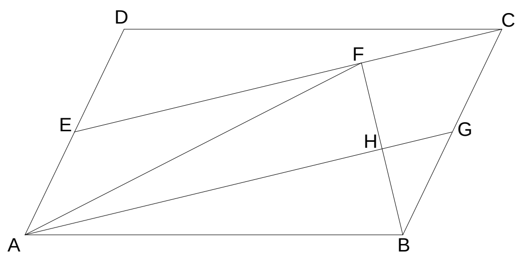
Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam G o ponto médio de $[BC]$ e H a intersecção de $[AG]$ e $[BF]$. Uma vez que $[AG]$ e $[EC]$ são paralelos, os triângulos $[BCF]$ e $[BGH]$ são semelhantes. Assim, $\frac{\overline{BF}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GB}} = 2$, ou seja, H é o ponto médio de $[BF]$. Além disso, $[AH]$ é perpendicular a $[BF]$, logo, $[AH]$ é a altura do triângulo $[ABF]$ relativamente à base $[BF]$ e divide-a em dois segmentos iguais. Portanto, o triângulo $[ABF]$ é isósceles.



5. **Solução 1:** Considere-se a factorização de n em números primos, $n = 2^{k_2}3^{k_3}5^{k_5}7^{k_7}\cdots$, onde, para cada número primo p, k_p é um inteiro não negativo. O número de divisores positivos de n é

$$(k_2+1)(k_3+1)(k_5+1)(k_7+1)\cdots .$$

Como a razão entre este número e n é $1/5$, então

$$\frac{k_2+1}{2^{k_2}}\frac{k_3+1}{3^{k_3}}\frac{k_5+1}{5^{k_5}}\frac{k_7+1}{7^{k_7}}\cdots = \frac{1}{5}.$$

Na tabela seguinte indica-se o valor de $\frac{k_p+1}{p^{k_p}}$ para cada primo p e cada k_p:

	$k_p=0$	$k_p=1$	$k_p=2$	$k_p=3$	$k_p=4$	$k_p=5$	$\cdots$
$p=2$	1	1	$3/4$	$1/2$	$5/16$	$<1/5$	$\cdots$
$p=3$	1	$2/3$	$1/3$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$\cdots$
$p=5$	1	$2/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$\cdots$
$p=7$	1	$2/7$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$\cdots$
$p=11$	1	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$\cdots$
$p=13$	1	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$<1/5$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pretende escolher-se um número em cada linha de modo que o produto de todos eles seja $1/5$. Como nenhum número da tabela é superior a 1, em cada linha o número escolhido não pode ser inferior a $1/5$. Assim, as possibilidades são as indicadas na nova tabela:

	$k_p = 0$	$k_p = 1$	$k_p = 2$	$k_p = 3$	$k_p = 4$	$k_p = 5$	$\cdots$
$p = 2$	1	1	$3/4$	$1/2$	$5/16$	$\times$	$\cdots$
$p = 3$	1	$2/3$	$1/3$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$
$p = 5$	1	$2/5$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$
$p = 7$	1	$2/7$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$
$p = 11$	1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$
$p = 13$	1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Na linha do 5 tem que se escolher o $2/5$, porque 5 não divide nenhum dos denominadores dos restantes números presentes nesta segunda tabela. Claramente nas linhas subsequentes tem que se escolher o 1. Resta então escolher dois números, um em cada uma das duas primeiras linhas, cujo produto seja $1/2$. Isto pode ser feito de duas formas:

- escolhendo $1/2$ na primeira linha e 1 na segunda;
- escolhendo $3/4$ na primeira linha e $2/3$ na segunda.

No primeiro caso obtém-se $n = 2^3 \times 5 = 40$ e no segundo obtém-se $n = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Há dois números naturais que são múltiplos de exactamente um quinto dos números naturais que não os excedem: 40 e 60.

Solução 2: Para m número natural designe-se por $\tau(m)$ o número de divisores positivos de m.

Observe-se que $\tau(m) \leq m$, para todo o natural m. Seja n um número natural tal que o número dos seus divisores positivos é $\frac{n}{5}$, isto é, $\tau(n) = \frac{n}{5}$. Então $\frac{n}{5}$ é um inteiro, ou seja, 5 divide n e, portanto, $n = 5^k a$, onde k e a são números naturais e 5 não divide a.

Do facto de 5^k e a serem primos entre si, conclui-se que os divisores positivos de n são os números naturais da forma bc com b divisor positivo de 5^k e c divisor positivo de a, logo, $\tau(n) = \tau(5^k)\tau(a)$. Como 5 é um número primo, os divisores positivos de 5^k são $k+1$, a saber $5^0, 5^1, \ldots, 5^{k-1}$ e 5^k, obtendo-se $\tau(a) = \frac{n}{5(k+1)} = \frac{5^{k-1}a}{k+1}$. Então $\frac{5^{k-1}a}{k+1} \leq a$, ou seja, $5^{k-1} \leq k+1$, concluindo-se que $k = 1$. Assim, $n = 5a$ com a número natural primo com 5 e tal que $\tau(a) = \frac{5^0 a}{2} = \frac{a}{2}$. Então a é par e existem números naturais i e b, com b ímpar e primo com 5, tais que $a = 2^i b$.

Sendo 2^i e b primos entre si, $\tau(a) = \tau(2^i)\tau(b) = (i+1)\tau(b)$ e, portanto, $\tau(b) = \frac{\tau(a)}{i+1} = \frac{a}{2(i+1)} = \frac{2^{i-1}b}{i+1}$. Uma vez que $\tau(b) \leq b$, obtém-se $2^{i-1} \leq i+1$, concluindo-se que $i \in \{1, 2, 3\}$. Estudem-se estas três possibilidades.

- Se $i = 1$ tem-se $\tau(b) = \frac{b}{2}$, o que é impossível porque b é ímpar. Assim, i não pode ser 1;
- Se $i = 2$ tem-se $\tau(b) = \frac{2}{3}b$, concluindo-se que 3 divide b. Suponha-se que $b = 3^j c$, com j e c números naturais e c ímpar e primo com 3 e com 5. Uma vez que 3^j e c são primos entre si, $\tau(b) = (j+1)\tau(c)$ e, portanto, $3\tau(b) = 2b \Leftrightarrow (j+1)\tau(c) = 2 \times 3^{j-1}c$. Atendendo a que $\tau(c) \leq c$, obtém-se que $j = 1$ e $\tau(c) = c$. Há apenas dois números naturais que verificam a última igualdade e que são 1 e 2. Como c é ímpar tem de ser $c = 1$, obtendo-se $n = 60$;
- Se $i = 3$ tem-se $\tau(b) = \frac{2^2}{4}b = b$. Como b é ímpar tem de ser $b = 1$, obtendo-se $n = 40$.

Observe-se que, de facto, 60 tem $\frac{60}{5} = 12$ divisores positivos $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ e $60)$ e 40 tem 8 divisores positivos $(1, 2, 4, 5, 8, 10, 20$ e $40)$. Assim, há dois números naturais que são múltiplos de exactamente um quinto dos números naturais que não os excedem: 40 e 60.

6. Prove-se que 8 apostas não são suficientes para garantir um prémio.

   Se houver 3 apostas com um número em comum, nenhuma aposta será premiada se sair a chave que contém este número e um número de cada uma das restantes 5 apostas.

   Se cada número aparece no máximo em duas apostas, existem pelo menos $6 \times 8 - 36 = 12$ números que aparecem em exactamente duas apostas. Considerem-se duas apostas com um número em comum. Estas duas apostas contêm no máximo 11 números distintos. Assim, existem outras duas apostas com um número em comum. Portanto, com a chave que contém um número comum ao primeiro par de apostas, um número comum a este segundo par e um número de cada uma das restantes 4 apostas, nenhuma das 8 apostas será premiada.

   Prove-se agora que com 9 apostas é possível garantir que se obtém um prémio.

   Considerem-se as 9 apostas seguintes:

   $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$; $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

   $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$; $\{10, 11, 12, 16, 17, 18\}$; $\{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$;

   $\{19, 20, 21, 22, 23, 24\}$; $\{25, 26, 27, 28, 29, 30\}$; $\{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

   São necessários 2 números para impedir que alguma das três primeiras apostas seja premiada, dois números para impedir que as três seguintes sejam premiadas e outros três números para as 3 últimas apostas. Uma vez que os três conjuntos de três apostas não têm números em comum e cada chave contém apenas 6 números, as 9 apostas indicadas garantem, pelo menos, um prémio, independentemente da chave que sair.

   Portanto, são necessárias no mínimo 9 apostas para garantir um prémio.