



# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIV OPM - Final - 2º dia - 1.04.2006 - Categoria B

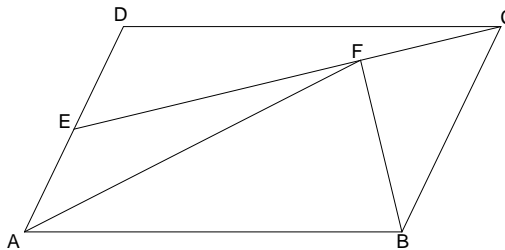
<http://www.spm.pt/~opm>

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

4. No paralelogramo  $[ABCD]$ ,  $E$  é o ponto médio de  $[AD]$  e  $F$  é a projecção ortogonal de  $B$  sobre  $[CE]$ . Prova que o triângulo  $[ABF]$  é isósceles.



5. Determina todos os números naturais  $n$  tais que exactamente um quinto dos números naturais  $1, 2, \dots, n$  são divisores de  $n$ .
6. Os inteiros de 1 a 36 estão escritos em cada boletim do "Neuro-Milhões". Uma aposta no "Neuro-Milhões" consiste em escolher 6 destes 36 números. Depois são sorteados 6 números entre 1 e 36, e estes constituem a chave do "Neuro-Milhões". Uma aposta é premiada se não contiver nenhum dos números da chave. Quantas apostas, no mínimo, são necessárias para garantir um prémio?