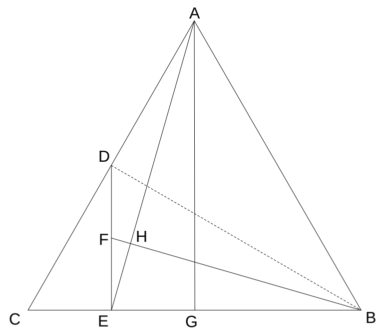
Sugestões para a resolução dos problemas

1. O Alexandre andou mais $45 - 30 = 15$ metros do que o Herculano e, no período de tempo que o Alexandre demorou a percorrer esses 15 metros, o comboio andou $45 + 30 = 75$ metros. Portanto, no mesmo período de tempo, o comboio percorre $75/15 = 5$ vezes mais metros do que cada um dos rapazes. Assim, enquanto o Herculano andou 30 metros, o comboio andou $30 \times 5 = 150$ metros. Como o Herculano começou a andar quando foi passado pela frente do comboio, parou quando se cruzou com o fim do comboio e andou 30 metros no sentido oposto, então o comboio tem $150 + 30 = 180$ metros de comprimento.

2. Seja G a projecção ortogonal de A sobre $[CB]$ e H a intersecção de $[BF]$ e $[AE]$. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, $[BD]$ é perpendicular a $[AC]$ e os triângulos $[DBC]$, $[EDC]$ e $[EBD]$ são semelhantes. Por outro lado, os triângulos $[GAC]$ e $[EDC]$ são semelhantes e D é o ponto médio de $[AC]$, logo E é o ponto médio de $[CG]$. Assim, $[AE]$ e $[FB]$ são medianas dos triângulos semelhantes $[GAC]$ e $[EBD]$, sobre os lados $[CG]$ e $[ED]$, respectivamente. Portanto os triângulos $[EBF]$ e $[GAE]$ são semelhantes e $G\hat{A}E = E\hat{B}F$. Note-se que, sendo $[GAE]$ um triângulo rectângulo, $G\hat{E}A = 90^o - G\hat{A}E = 90^o - E\hat{B}F$. Conclui-se que o triângulo $[BHE]$ é rectângulo e, portanto, $[AE]$ e $[FB]$ são perpendiculares.



3. O número total de feijões a distribuir pelas 2007 caixas é $(0 + 1 + 2 + \ldots + 2006) \times n$, pelo que cada caixa deverá ficar com n sacos e $1003n$ feijões.

   - Para $n = 1$ é claramente impossível já que cada caixa vai conter apenas um saco, tendo assim todas um número diferente de feijões.
   - Para $n = 2$ é possível efectuar a distribuição pretendida. Cada uma das 2007 caixas conterá 2 sacos e 2006 feijões, que podem ser distribuídos da seguinte forma:
     - 2 caixas contendo um saco vazio e um saco com 2006 feijões
     - 2 caixas contendo um saco com 1 feijão e um saco com 2005 feijões
     - 2 caixas contendo um saco com 2 feijões e um saco com 2004 feijões
     - ...
     - 2 caixas contendo um saco com 1002 feijões e um saco com 1004 feijões
     - 1 caixa contendo os dois sacos com 1003 feijões

ou seja, 2 caixas contendo cada uma um saco com i feijões e um saco com $2006 - i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 1002$ e 1 caixa contendo os dois sacos com 1003 feijões.

- Para $n = 3$ é possível efectuar a distribuição pretendida. Cada uma das 2007 caixas conterá 3 sacos e 3009 feijões, que podem ser distribuídos da seguinte forma:
  - 3 caixas contendo um saco vazio, um saco com 1672 feijões e um saco com 1337 feijões
  - 3 caixas contendo um saco com 1 feijão, um saco com 1673 feijões e um saco com 1335 feijões
  - 3 caixas contendo um saco com 2 feijões, um saco com 1674 feijões e um saco com 1333 feijões
  - $\ldots$
  - 3 caixas contendo um saco com 334 feijões, um saco com 2006 feijões e um saco com 669 feijões
  - 3 caixas contendo um saco com 335 feijões, um saco com 1338 feijões e um saco com 1336 feijões
  - 3 caixas contendo um saco com 336 feijões, um saco com 1339 feijões e um saco com 1334 feijões
  - 3 caixas contendo um saco com 337 feijões, um saco com 1340 feijões e um saco com 1332 feijões
  - $\ldots$
  - 3 caixas contendo um saco com 668 feijões, um saco com 1671 feijões e um saco com 670 feijões

  ou seja, 3 caixas contendo cada uma um saco com i feijões, um saco com $1672 + i$ feijões e um saco com $1337 - 2i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 334$ e 3 caixas contendo cada uma um saco com $335 + i$ feijões, um saco com $1338 + i$ feijões e um saco com $1336 - 2i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 333$.

  É imediato verificar que todos os sacos foram utilizados e que cada caixa contém 3009 feijões.

- Para qualquer $n \geq 4$ também é possível efectuar a distribuição pretendida. Basta observar que se pode decompor n como soma de 2's e 3's e como tal a distribuição pretendida obtém-se reunindo distribuições iguais às anteriores. Por exemplo, para $n = 11 = 4 \times 2 + 3$ colocar-se-ia em cada caixa 4 vezes o conteúdo de cada uma das caixas da distribuição obtida para $n = 2$ e uma vez o conteúdo de cada uma das caixas da distribuição obtida para $n = 3$.

Logo é possível efectuar a distribuição pretendida se e só se $n > 1$.