Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:**

   No primeiro minuto saem da fila 8 automóveis e entra um, pelo que a fila perde 7 automóveis. No segundo minuto a fila perde 6 automóveis, no terceiro minuto perde 5 e assim sucessivamente até ao sétimo minuto em que a fila perde um automóvel. No oitavo minuto o número de automóveis na fila mantém-se porque saem da fila 8 automóveis e entram outros 8. A partir deste momento a fila aumenta: no nono minuto ganha um automóvel, no décimo dois, e assim sucessivamente. No décimo quinto minuto a fila ganha 7 automóveis, ou seja, a fila volta a ter 30 automóveis ao fim de 15 minutos.

   Solução 2:

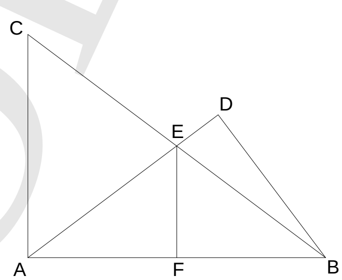
   Nos primeiros n minutos saem da fila $8n$ automóveis e chegam $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ automóveis. Para que o número de automóveis na fila, ao fim de n minutos, seja o inicial basta que

   $$\frac{n(n+1)}{2}=8n,$$

   ou seja, $n=15$. A fila volta a ter 30 automóveis ao fim de 15 minutos.

2. Pela contagem do Tiago deduz-se que o número de rodas dos automóveis é igual ao número total de rodas menos 26. Pela contagem do irmão do Tiago tem-se que o número de rodas dos triciclos é igual ao número total de rodas menos 26 e pela contagem do pai do Tiago sabe-se que o número de rodas das bicicletas é igual ao número total de rodas menos 26. Logo, o número de rodas dos automóveis, dos triciclos e das bicicletas é o mesmo. Como esse número é múltiplo de $2,3$ e 4, também é múltiplo de m.m.c.$(2,3,4)=12$. Além disso, como o pai do Tiago contou rodas dos automóveis, triciclos e carrinhos de mão, o número de rodas dos automóveis é no máximo $26-3-1=22$. Portanto, existiam 12 rodas de automóveis. Assim, na garagem havia $\frac{12}{4}=3$ automóveis, $\frac{12}{3}=4$ triciclos, $\frac{12}{2}=6$ bicicletas e $26-2\times 12=2$ carrinhos de mão. Na garagem estavam $3+4+6+2=15$ veículos.

3. Seja F a projecção ortogonal de E sobre $[AB]$.



   Solução 1:

   Sendo $[ABD]$ um triângulo rectângulo com catetos $\overline{BD}=12$ e $\overline{AD}=16$, o Teorema de Pitágoras garante que $\overline{AB} = 20$. Uma vez que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{4} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

os triângulos $[ABC]$ e $[DAB]$ são semelhantes e $B\widehat{A}E = A\widehat{B}E$. Então $\overline{AE} = \overline{EB}$, ou seja, o triângulo $[ABE]$ é isósceles.

Por um lado, $[EF]$ é a altura do triângulo isósceles $[ABE]$ relativamente à base $[AB]$, logo $\overline{AF} = \overline{FB} = 10$. Por outro lado, o triângulo rectângulo $[AFE]$ é semelhante ao triângulo $[BAC]$, logo

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $\overline{EF} = \dfrac{15}{2}$. Portanto, a área do triângulo $[ABE]$ é $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{EF}}{2} = 75$.

Solução 2:

Sendo $[ABD]$ um triângulo rectângulo com catetos $\overline{BD} = 12$ e $\overline{AD} = 16$, o Teorema de Pitágoras garante que $\overline{AB} = 20$.

Por um lado, como $[AC]$ e $[FE]$ são paralelos, os triângulos $[ABC]$ e $[FBE]$ são semelhantes e, tem-se

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}},$$

ou seja, $\overline{EF} = \dfrac{3}{4}\overline{FB}$.

Por outro lado $B\widehat{A}D = F\widehat{A}D$, logo os triângulos rectângulos $[ABD]$ e $[AEF]$ são semelhantes e

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}},$$

ou seja, $\overline{EF} = \dfrac{3}{4}\overline{AF}$.

Assim, tem-se $\overline{AF} = \overline{FB} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = 10$ e $\overline{EF} = \dfrac{15}{2}$. Portanto, a área de $[ABE]$ é $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{EF}}{2} = 75$.

4. Observe-se que um número que tem todos os algarismos iguais a d pode ser escrito na forma $d \times 11\ldots11$. Pretende-se encontrar o menor número natural n que verifique

$$n + 2 \times n + 3 \times n + \cdots + 9 \times n = d \times 11\ldots11,$$

ou seja, $45 \times n = d \times 11\ldots11$. Assim, 45 é divisor de $d \times 11\ldots11$ e, por isso, 5 também divide $d \times 11\ldots11$. Uma vez que 5 é um número primo e não divide $11\ldots11$, o número 5 é divisor do algarismo d. Deste modo, conclui-se que $d = 5$ e que $45 \times n = 5 \times 11\ldots11$, ou seja, $9 \times n = 11\ldots11$. Resta encontrar o menor número da forma $11\ldots11$ que é divisível por 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, a soma dos algarismos desse número tem de ser múltipla de 9. Logo, esse número é 111111111. Assim, $n = 111111111/9 = 12345679$.