Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIV OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2005 - Categoria A - 8º/9º

http://www.spm.pt/~opm

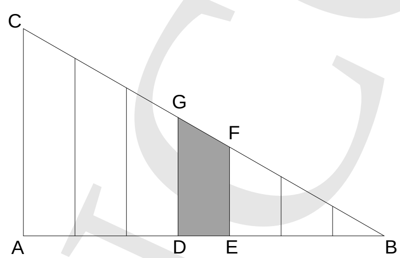
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:** Como o lobo dorme tanto numa semana quanto a coruja dorme num dia, a coruja dorme 7 vezes mais do que o lobo. Por cada hora que o lobo dorme a coruja dorme 7 horas, por cada 2 horas que o lobo dorme a coruja dorme 14 e por cada 3 horas que o lobo dorme a coruja dorme 21. Como $21+3=24$ horas, num dia, o lobo dorme 3 horas e a coruja as restantes 21 horas.

   Solução 2: Como o lobo dorme tanto numa semana quanto a coruja dorme num dia, a coruja dorme 7 vezes mais do que o lobo. A soma dos números de horas que a coruja e o lobo dormem por dia é 24, logo, 24 horas é 8 vezes o número de horas que o lobo dorme por dia. Então o lobo dorme $\dfrac{24}{8}=3$ horas por dia e a coruja dorme 21 horas.

2. **Solução 1:** Sejam A, B, C os vértices do triângulo e D, E, F, G os vértices do trapézio sombreado.



Como $[EBF]$, $[DBG]$ e $[ABC]$ são triângulos semelhantes e os trapézios têm todos igual largura, tem-se

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{4}{7} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}.$$

Assim,

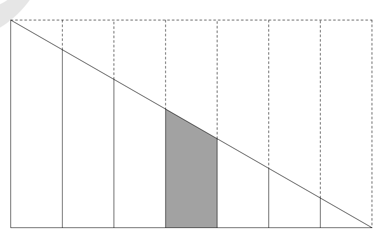
$$\frac{\text{área }[DBG]}{\text{área }[ABC]}=\frac{16}{49} \quad \text{e} \quad \frac{\text{área }[EBF]}{\text{área }[ABC]}=\frac{9}{49}.$$

Portanto,

$$\frac{\text{área }[FGDE]}{\text{área }[ABC]}=\frac{\text{área }[DBG]-\text{área }[EBF]}{\text{área }[ABC]}=\frac{16}{49}-\frac{9}{49}=\frac{1}{7}$$

e a área do canteiro sombreado é 3 m^2.

Solução 2: Considere-se o rectângulo indicado na figura.



Note-se que o rectângulo tem 42 m^2 de área e está dividido em sete rectângulos geometricamente iguais, cada um com 6 m^2 de área. A diagonal do rectângulo divide o quarto rectângulo em dois trapézios geometricamente iguais e, consequentemente, com a mesma área. Portanto, a área do canteiro sombreado é 3 m^2.

3. Pela contagem do Tiago deduz-se que o número de rodas dos automóveis é igual ao número total de rodas menos 26. Pela contagem do irmão do Tiago tem-se que o número de rodas dos triciclos é igual ao número total de rodas menos 26 e pela contagem do pai do Tiago sabe-se que o número de rodas das bicicletas é igual ao número total de rodas menos 26. Logo, o número de rodas dos automóveis, dos triciclos e das bicicletas é o mesmo. Como esse número é múltiplo de $2, 3$ e 4, também é múltiplo de m.m.c.$(2, 3, 4) = 12$. Além disso, como o pai do Tiago contou rodas dos automóveis, triciclos e carrinhos de mão, o número de rodas dos automóveis é no máximo $26 - 3 - 1 = 22$. Portanto, existiam 12 rodas de automóveis. Assim, na garagem havia $\frac{12}{4} = 3$ automóveis, $\frac{12}{3} = 4$ triciclos, $\frac{12}{2} = 6$ bicicletas e $26 - 2 \times 12 = 2$ carrinhos de mão. Na garagem estavam $3 + 4 + 6 + 2 = 15$ veículos.

4. Represente-se por ab o número natural composto pelos algarismos a e b.

Solução 1: A soma do número natural com o seu reverso é

$$ab + ba = 10 \times a + b + 10 \times b + a = 11 \times a + 11 \times b = 11 \times (a + b).$$

Sendo a e b algarismos, tem-se $1 \leq a + b \leq 18$. O número $11 \times (a + b)$ é um quadrado perfeito se, e somente se, $a + b = 11$. Portanto, os números pretendidos são $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ e 92.

Solução 2: Sendo a e b algarismos, tem-se $1 \leq a + b \leq 18$.

Se $a + b < 10$, calculando a soma de ab com o seu reverso obtém-se

$$\begin{array}{ccc} & a & b \\ + & b & a \\ \hline & a+b & a+b \end{array}$$

ou seja, $ab + ba$ tem os dois algarismos iguais a $a + b$. Os números $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ são desta forma mas nenhum deles é um quadrado perfeito.

Se $a + b \geq 10$, o algarismo das unidades de $ab + ba$ é o algarismo das unidades de $a + b$ e o número de dezenas de $ab + ba$ é $a + b + 1$. Assim, $ab + ba$ pode ser $110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198$. Entre estes números, o único quadrado perfeito é 121, que corresponde a considerar $a + b = 11$. Portanto, os números pretendidos são $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ e 92.