Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - Final - 2º dia - 19.03.2005 - Categoria A

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

4. Designe-se por $a$ a idade do noivo e por $b$ a idade do pai da Junosga, no dia do casamento. A lei do planeta Pitagórico garante que $33^2 + a^2 = b^2$, ou seja,

$$b^2 - a^2 = 33^2.$$

Factorizando $33$ em números primos, vem $33 = 3 \times 11$ e a igualdade acima escreve-se na forma

$$(b - a)(b + a) = 3^2 \times 11^2.$$

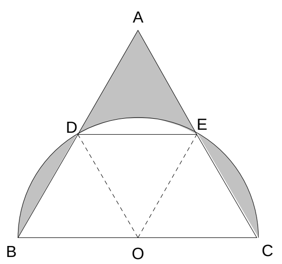
**Solução 1:** Como $b > 500$, também $b+a > 500$ e, consequentemente, $b+a = 3^2 \times 11^2 = 1089$ e $b-a = 1$. Portanto, $a = 544$ e $b = 545$. O noivo da Junosga tinha $544$ anos.

**Solução 2:** Na tabela seguinte estão indicadas as quatro soluções inteiras positivas da equação anterior.

| $b+a$ | $b-a$ | $b$ | $a$ |
|---|---|---|---|
| $3^2 \times 11^2$ | $1$ | $545$ | $544$ |
| $3 \times 11^2$ | $3$ | $183$ | $180$ |
| $11^2$ | $3^2$ | $65$ | $56$ |
| $3^2 \times 11$ | $11$ | $55$ | $44$ |

Como o pai da Junosga tinha mais do que $500$ anos, conclui-se que ele tinha $545$ anos e que o noivo da Junosga tinha $544$ anos.

5. Sejam $D$ e $E$ os pontos de intersecção do semicírculo com os lados do triângulo e $O$ o centro do semicírculo, como se indica na figura.




Como $\overline{BO} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$ e $D\widehat{B}O = O\widehat{C}E = 60^o$, tem-se que $O\widehat{D}B = C\widehat{E}O = 60^o$ e que os triângulos $[DBO]$ e $[EOC]$ são equiláteros e congruentes. Logo, $D\widehat{O}E = 60^o$ e os triângulos $[DOE]$ e $[ADE]$ são equiláteros. Assim, os triângulos $[DBO]$, $[EOC]$, $[DOE]$ e $[ADE]$ são congruentes e têm a mesma área, $t$.

Seja $s$ a área da região limitada pelo arco $DE$ e pela corda $[DE]$.

**Solução 1:** Por aplicação do Teorema de Pitágoras, tem-se $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Então, $s = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ e portanto a área da região sombreada é $t - s + 2s = t + s = \frac{\pi}{6}$ cm$^2$.

**Solução 2:** A área da região sombreada é dada por $2s + t - s = s + t$. Observe-se que a área do semicírculo é $3(s + t)$. Logo a área da região sombreada é $\frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ cm$^2$.

6. Todo o número da forma $6k$, com $k > 1$, é abundante porque é, pelo menos, divisível por $1$, $k$, $2k$, $3k$ e $6k$, cuja soma é maior do que $12k$.

   Se $n > 46$ e $n$ é múltiplo de $6$, então $n = 12 + (n - 12)$, e as parcelas $12$ e $n - 12$ são múltiplas de $6$ e maiores do que $6$, logo abundantes.

   Como só se consideram números pares, interessa encontrar dois números abundantes menores do que $46$ cujo resto da divisão por $6$ seja $2$ e $4$.

   Ora, $20$ é abundante ($1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42 > 40$) e o resto da sua divisão por $6$ é $2$. Como $20$ é abundante, também $40$ é abundante e o resto da sua divisão por $6$ é $4$.

   Assim, se $n > 46$ e o resto da divisão de $n$ por $6$ é $2$, então $n = 20 + (n - 20)$, que é a soma de dois números abundantes já que $n - 20$ é múltiplo de $6$ e maior do que $6$.

   Por fim, se $n > 46$ e o resto da sua divisão por $6$ é $4$, então $n = 40 + (n - 40)$, que é a soma de dois números abundantes porque $n - 40$ é múltiplo de $6$ e maior do que $6$.