



# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - Final - 1º dia - 18.03.2005 - Categoria A

<http://www.spm.pt/~opm>

Duração: 3 horas  
Questão 1: 16 pontos  
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Escrevendo mais alguns algarismos da lista

8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6, ...

observa-se que o 21º e o 22º algarismos coincidem com o 1º e o 2º, respectivamente. Sendo assim, os algarismos repetem-se em ciclos de 20. Uma vez que  $2005 = 20 \times 100 + 5$ , o último algarismo da lista é igual ao 5º, ou seja, é 4.

Opção correcta: C).

- (b) A área da região sombreada é a terça parte da área do quadrado, logo é igual a  $\frac{1}{3} \times 6^2 = 12$ . Por outro lado, esta área é igual à soma das áreas dos triângulos  $[AEF]$  e  $[ECF]$ . Cada um destes triângulos tem base  $[EF]$  e a soma das suas alturas é 6. Deste modo, a soma das suas áreas é  $\frac{\overline{EF} \times 6}{2} = 3 \overline{EF}$ . Portanto, tem-se  $3 \overline{EF} = 12$ , ou seja,  $\overline{EF} = 4$  cm.

Opção correcta: C).

- (c) Observe-se que o número de pessoas que irão conhecer a anedota será máximo se a anedota não for contada a ninguém que já a conheça. Nesse caso, em cada dia o número de novas pessoas que ficam a conhecer a anedota é a soma do número de pessoas que conheceram a anedota no dia anterior com o dobro do número de pessoas que conheceram a anedota dois dias antes. Ontem, só eu conhecia a anedota, hoje (dia 1) uma nova pessoa vai conhecê-la e amanhã (dia 2) serão (usando a regra indicada)  $1 + 2 \times 1 = 3$  novas pessoas. Constrói-se a tabela:

Ontem	1
Hoje/ Dia 1	1
Dia 2	$1 + 2 \times 1 = 3$
Dia 3	$3 + 2 \times 1 = 5$
Dia 4	$5 + 2 \times 3 = 11$
Dia 5	$11 + 2 \times 5 = 21$
Dia 6	$21 + 2 \times 11 = 43$
Dia 7	$43 + 2 \times 21 = 85$

O número máximo de pessoas que conhecerão a anedota é  $1 + 1 + 3 + 5 + 11 + 21 + 43 + 85 = 170$ .

Opção correcta: E).

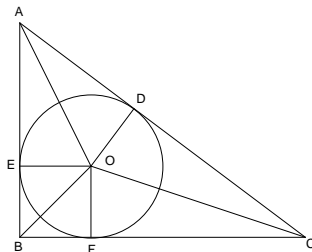
- (d) Se tivessem faltado 9 alunos os três dias, então teriam faltado mais  $15 - 9 = 6$  alunos, na segunda, e mais  $12 - 9 = 3$  alunos, na terça. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo,  $9 + 6 + 3 = 18$  alunos, o que não está de acordo com as hipóteses.

Se tivessem faltado 8 alunos os três dias, então teriam faltado mais  $15 - 8 = 7$  alunos, na segunda, mais  $12 - 8 = 4$  alunos, na terça, e mais  $9 - 8 = 1$  aluno, na quarta. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo,  $8 + 7 + 4 + 1 = 20$  alunos, o que não está de acordo com as hipóteses.

Se tivessem faltado 7 alunos os três dias, então teriam faltado mais  $15 - 7 = 8$  alunos, na segunda, mais  $12 - 7 = 5$  alunos, na terça, e mais  $9 - 7 = 2$  alunos, na quarta. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo,  $7 + 8 + 5 + 2 = 22$  alunos. Supondo que 7 alunos faltaram os três dias e que os restantes só faltaram num dia, cumprem-se as hipóteses.

Opção correcta: C).

2. Considere-se um triângulo rectângulo  $[ABC]$  nas condições do enunciado. Designe-se por  $O$  o centro do círculo nele inscrito e por  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos em que o círculo toca os lados  $[AC]$ ,  $[AB]$  e  $[BC]$ , respectivamente. Denote-se  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, e o comprimento do raio do círculo por  $r$ . Suponha-se que  $a \geq b$ .



Sabe-se que  $\frac{ab}{2} = 6$ , ou seja,  $ab = 12 = 2^2 \times 3$ . Da igualdade  $a^2 + b^2 = c^2$ , obtida por aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo  $[ABC]$ , e uma vez que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números inteiros, conclui-se que  $a = 4$ ,  $b = 3$  e  $c = 5$ .

**Solução 1:** Por um lado,  $\overline{AE} = 4 - r$  e  $\overline{FC} = 3 - r$ . Por outro lado, os triângulos rectângulos  $[AEO]$  e  $[ADO]$  são congruentes, bem como os triângulos rectângulos  $[OFC]$  e  $[ODC]$ , pelo que  $\overline{AD} = \overline{AE} = 4 - r$  e  $\overline{DC} = \overline{FC} = 3 - r$ . Assim,  $5 = 4 - r + 3 - r$ , ou seja,  $r = 1$ .

**Solução 2:** A área do triângulo  $[ABC]$  corresponde à soma das áreas dos triângulos  $[ABO]$ ,  $[BCO]$  e  $[AOC]$ , pelo que se obtém  $\frac{4r}{2} + \frac{3r}{2} + \frac{5r}{2} = 6$ , ou seja,  $r = 1$ .

Portanto, o comprimento do raio do círculo é 1 cm.

3. Numerem-se as pessoas da fila de 1 a 2005.

**Solução 1:** Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, não foram eliminados os números que têm resto 1 quando divididos por 3. Assim, restaram os 669 números da forma  $3k_1 + 1$ ,  $k_1 = 0, 1, \dots, 668$ , ou seja, 1, 4, 7, 10, 13, 16,  $\dots$ , 2002, 2005. Observe-se que estes números podem ser representados pelo índice  $k_1$ , que começa em zero. Logo, destes 669 números não foram eliminados os 223 números da forma  $3k_1 + 1$ , com  $k_1 = 3k_2$  e  $k_2 = 0, \dots, 222$ . Uma vez que  $222 = 3 \times 74$ ,  $74 = 3 \times 24 + 2$ ,  $24 = 3 \times 8 + 0$  e  $8 = 3 \times 2 + 2$ , conclui-se que, após cinco repetições do processo, não foram eliminados os três números da forma  $3k_1 + 1$ , com  $k_1 = 3k_2$ ,  $k_2 = 3k_3$ ,  $k_3 = 3k_4$ ,  $k_4 = 3k_5$ ,  $k_5 = 3k_6$  e  $k_6 = 0, 1$  e  $2$ .

Assim, as pessoas que ganharam as entradas estavam inicialmente nas posições  $3^6 k_6 + 1$ , para  $k_6 = 0, 1$  e  $2$ , ou seja, 1, 730 e 1459.

**Solução 2:** Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, a diferença entre os números de pessoas consecutivas na nova fila é constante e igual a 3. Em cada passo do processo a diferença entre os números de pessoas consecutivas é o triplo da diferença no passo anterior. Após  $n$  passos a diferença entre os números é  $3^n$  e, como o número 1 é sempre escolhido, os números das pessoas que não foram eliminados são  $1, 3^n + 1, 2 \times 3^n + 1, 3 \times 3^n + 1, \dots$ . No último passo,  $2 \times 3^n + 1 \leq 2005$  e  $3 \times 3^n + 1 > 2005$ , ou seja,  $n = 6$ . As pessoas que ganharam estavam inicialmente nas posições  $1, 3^6 + 1$  e  $2 \times 3^6 + 1$ , ou seja, 1, 730 e 1459.