Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2005 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Para que o fóssil do número seja ímpar, todos os seus algarismos têm de ser ímpares, pois o produto de um número par por um número qualquer é sempre um número par. Assim, só nos restam os algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9 para construir o número pretendido.

   Por outro lado, como os algarismos têm de ser todos diferentes, o número terá, no máximo, 5 algarismos. Contudo, qualquer número com 5 algarismos ímpares e todos diferentes tem fóssil 0. De facto, o produto dos números $1, 3, 5, 7$ e 9 é 945 e o seu fóssil é 0.

   O maior número com 4 algarismos ímpares e todos diferentes é 9753, mas tem fóssil 0. O número que o antecede com os 4 algarismos ímpares e todos diferentes é 9751 e o seu fóssil é 5.

   Portanto, o maior número com os algarismos todos diferentes, cujo fóssil é ímpar, é 9751.

2. Denote-se $\overline{AC}$, $\overline{EC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{BE}$ por c, d, e e f, respectivamente.

   A razão entre a área do polígono $[AEFD]$, $\frac{ab}{2} - \frac{ed}{2}$, e a área do polígono $[ABCFE]$, $\frac{ab}{2} + \frac{ed}{2}$, é dada pela expressão
$$R = \frac{ab - ed}{ab + ed}.$$

   Como os triângulos $[ABC]$ e $[CEF]$ são semelhantes, tem-se $\frac{e}{b} = \frac{d}{a}$, ou seja, $ae = bd$. Assim,
$$R = \frac{ab(ab - ed)}{ab(ab + ed)} = \frac{(ab)^2 - (ae)(bd)}{(ab)^2 + (ae)(bd)} = \frac{(ab)^2 - (bd)^2}{(ab)^2 + (bd)^2} = \frac{a^2 - d^2}{a^2 + d^2}.$$

   Solução 1: Os triângulos $[ABC]$ e $[AEB]$ são semelhantes, logo, $\frac{c}{a} = \frac{a}{c-d}$, ou seja, $d = \frac{c^2 - a^2}{c}$. Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$, conclui-se que $c^2 = a^2 + b^2$. Deste modo, $d^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$ e a razão é dada pela expressão
$$R = \frac{a^2(a^2 + b^2) - b^4}{a^2(a^2 + b^2) + b^4} = \frac{a^4 + a^2b^2 - b^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}.$$

   Solução 2: Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos rectângulos $[ABE]$ e $[EBC]$, conclui-se que $(c-d)^2 + f^2 = a^2$ e $d^2 + f^2 = b^2$, pelo que $(c-d)^2 - d^2 = a^2 - b^2$, ou seja, $2cd = c^2 - a^2 + b^2$. Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$, conclui-se que $c^2 = a^2 + b^2$. Deste modo, $d = \frac{b^2}{c}$ e $d^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$.

   Portanto, a razão é dada pela expressão
$$R = \frac{a^2(a^2 + b^2) - b^4}{a^2(a^2 + b^2) + b^4} = \frac{a^4 + a^2b^2 - b^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}.$$

3. Há $10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2$ formas possíveis de percorrer as 10 cidades, visitando cada uma exactamente uma vez. Em cada uma destas possibilidades, as vogais estão dispostas de uma determinada forma. Há 3×2 formas diferentes de dispor as vogais entre elas. Entre estas, apenas uma interessa ao Jaime Bom. Logo, há $\frac{10\times 9\times\cdots\times 3\times 2}{3\times 2}$ formas de visitar as 10 cidades com as vogais por ordem alfabética. Como em metade destes percursos B é visitada antes de C, há $\frac{10\times 9\times\cdots\times 3\times 2}{(3\times 2)\times 2} = 302400$ trajectos possíveis para visitar as 10 cidades naquelas condições.

4. Em primeiro lugar observe-se que o algarismo das unidades da soma indicada é o mesmo da soma

$$\begin{array}{llllllllll}
1^1 & +\,2^2 & +\,3^3 & +\,4^4 & +\,5^5 & +\,6^6 & +\,7^7 & +\,8^8 & +\,9^9 & + \\
1^{11} & +\,2^{12} & +\,3^{13} & +\,4^{14} & +\,5^{15} & +\,6^{16} & +\,7^{17} & +\,8^{18} & +\,9^{19} & + \\
1^{21} & +\,2^{22} & +\,3^{23} & +\,4^{24} & +\,5^{25} & +\,6^{26} & +\,7^{27} & +\,8^{28} & +\,9^{29} & + \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
1^{1991} & +\,2^{1992} & +\,3^{1993} & +\,4^{1994} & +\,5^{1995} & +\,6^{1996} & +\,7^{1997} & +\,8^{1998} & +\,9^{1999} & + \\
1^{2001} & +\,2^{2002} & +\,3^{2003} & +\,4^{2004} & +\,5^{2005} & & & & &
\end{array}$$

Sendo a um algarismo, a sucessão dos algarismos das unidades de a, a^2, a^3, a^4, a^5, $\ldots$ é:

- constante para $a = 0, 1, 5$ e 6;
- repete-se em ciclos de ordem 2 para $a = 4$ e 9;
- repete-se em ciclos de ordem 4 para os algarismos $a = 2, 3, 7$ e 8.

Assim, em todos os casos, o algarismo das unidades de a^n, a^{n+4}, a^{n+8}, $a^{n+12} \cdots$, é sempre o mesmo. Portanto, o algarismo pretendido é o algarismo das unidades da soma

$$\begin{array}{llllllllll}
1^1 & +\,2^2 & +\,3^3 & +\,4^4 & +\,5^1 & +\,6^2 & +\,7^3 & +\,8^4 & +\,9^1 & + \\
1^3 & +\,2^4 & +\,3^1 & +\,4^2 & +\,5^3 & +\,6^4 & +\,7^1 & +\,8^2 & +\,9^3 & + \\
1^1 & +\,2^2 & +\,3^3 & +\,4^4 & +\,5^1 & +\,6^2 & +\,7^3 & +\,8^4 & +\,9^1 & + \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
1^3 & +\,2^4 & +\,3^1 & +\,4^2 & +\,5^3 & +\,6^4 & +\,7^1 & +\,8^2 & +\,9^3 & + \\
1^1 & +\,2^2 & +\,3^3 & +\,4^4 & +\,5^1 & & & & &
\end{array}$$

Nas primeiras 200 linhas, cada potência aparece 100 vezes, logo o algarismo das unidades da soma destas potências é 0.

Resta-nos ver qual é o algarismo das unidades de $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^1$. Este algarismo é o algarismo das unidades de $1 + 4 + 7 + 6 + 5 = 23$, que é 3.