Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/∼opm

XXIII OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2004 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A diferença entre a hora de partida e a hora de chegada na viagem de ida é de 1 hora e 55 minutos, enquanto que na viagem de regresso a diferença é de 5 horas e 45 minutos.

   Solução 1: Se a viagem de regresso durasse o mesmo tempo que a viagem de ida, a diferença entre a hora de partida e a hora de chegada na viagem de regresso seria 5 horas e 55 minutos. Então, a soma destas duas diferenças deve ser o dobro da duração da viagem de ida, ou seja, 7 horas e 50 minutos. Assim, a viagem de ida de Toucá para Toulá dura 3 horas e 55 minutos.

   Como a viagem de ida dura 3 horas e 55 minutos e a diferença entre a hora local de partida e a hora local de chegada é 1 hora e 55 minutos, a diferença horária entre os dois destinos é de duas horas.

   Solução 2: Seja D a diferença horária entre Toucá e Toulá, em horas. Então, a viagem de ida tem uma duração de $1 + D$ horas e 55 minutos. A viagem de regresso tem uma duração de $5 - D$ horas e 45 minutos. Como sabemos que a viagem de regresso dura menos 10 minutos que a viagem de ida, $5 - D$ horas e 45 minutos é igual a $1 + D$ horas e $55 - 10$ minutos, ou seja, $D = 2$ horas. Assim, a viagem de ida tem uma duração de 3 horas e 55 minutos e a diferença horária entre os dois destinos é de duas horas.

2. Para construir uma torre de 100 andares é necessário colocar no primeiro andar 2×100 cartas, seguidas de 99 cartas na horizontal, no segundo andar 2×99 cartas, seguidas de 98 cartas na horizontal, e assim sucessivamente, terminando com apenas 2 cartas no 100º andar. Logo, o número de cartas necessárias é

$$(2 \times 100 + 99) + (2 \times 99 + 98) + \ldots + (2 \times 2 + 1) + 2 \times 1$$

$$= 2 \times (100 + 99 + \ldots + 2 + 1) + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

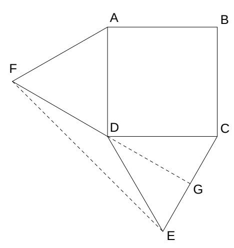
   A soma $100 + 99 + \ldots + 2 + 1$ tem 100 parcelas. Associando a primeira parcela com a última, a segunda com a penúltima, a terceira com a antepenúltima, e assim sucessivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 &= (100 + 1) + (99 + 2) + \cdots + (52 + 49) + (51 + 50) \\ &= 50 \times 101 = 5050. \end{aligned}$$

   Logo, $99 + 98 + \ldots + 2 + 1 = 5050 - 100 = 4950$.

   Portanto, são necessárias $2 \times 5050 + 4950 = 15050$ cartas para construir uma torre com 100 andares.

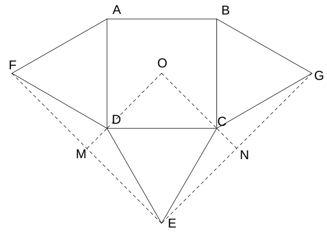
3. **Solução 1:** Seja G o ponto de intersecção de $[CE]$ com a recta que passa por F e D. Uma vez que $A\hat{D}F = E\hat{D}C = 60^o$, tem-se $F\hat{D}E = 150^o$. Além disso, $\overline{FD} = \overline{DE}$, ou seja, o triângulo $[DEF]$ é isósceles, e, por isso, $D\hat{E}F = E\hat{F}D = 15^o$. Também se tem $G\hat{E}D = 60^o$, logo $G\hat{E}F = 75^o$ e $D\hat{G}E = 90^o$. Por um lado, $[DG]$ é a altura do triângulo equilátero $[CED]$ relativamente ao lado $[CE]$ e $\overline{GE} = \frac{\overline{CE}}{2}$. Por outro lado, $[GE]$ é a altura do triângulo $[DEF]$ relativamente ao lado $[FD]$ e, assim, a área do triângulo $[DEF]$ é



$$\frac{\overline{FD} \times \overline{GE}}{2} = \frac{\overline{FD} \times \overline{CE}}{4} = \frac{1}{4}(\overline{AB} \times \overline{BC}).$$

   Portanto, a área do triângulo $[DEF]$ é um quarto da área do quadrado $[ABCD]$.

Solução 2: Sejam $[BGC]$ o triângulo equilátero construído sobre $[BC]$ e O o centro do quadrado $[ABCD]$, como se indica na figura. O prolongamento de $[OC]$ intersecta $[EG]$ no ponto N e o prolongamento de $[OD]$ intersecta $[FE]$ no ponto M.



Como o triângulo $[FOE]$ é isósceles e $[OM]$ bissecta $\measuredangle FOE$, $E\hat{M}O = 90^o$ e M é o ponto médio de $[FE]$. Da mesma forma se tem que $O\hat{N}E = 90^o$. Assim, $[ONEM]$ é um quadrado e $\overline{ME} = \overline{OM} = \overline{OD} + \overline{DM}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[DEM]$, obtém-se

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{DM}^2 + \overline{ME}^2 \\ &= \overline{DM}^2 + \left(\overline{OD} + \overline{DM}\right)^2 \\ &= 2\,\overline{DM}^2 + 2\,\overline{OD} \times \overline{DM} + \overline{OD}^2 \\ &= 2\,\overline{DM} \times \left(\overline{DM} + \overline{OD}\right) + \overline{OD}^2 \\ &= 2\,\overline{DM} \times \overline{ME} + \overline{OD}^2.\end{aligned}$$

Mas, por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[OCD]$, tem-se

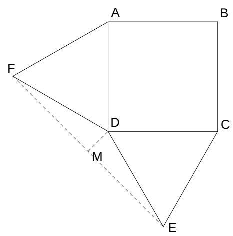
$$\overline{DC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 = 2\,\overline{OD}^2$$

e, como $\overline{DC} = \overline{DE}$, conclui-se que

$$\overline{DC}^2 = 4\,\overline{DM} \times \overline{ME}.$$

Portanto, a área do triângulo $[FDE]$ é um quarto da área do quadrado $[ABCD]$.

Solução 3: Uma vez que $A\hat{D}F = E\hat{D}C = 60^o$, tem-se $F\hat{D}E = 150^o$. Além disso, $\overline{FD} = \overline{DE}$, ou seja, o triângulo $[DEF]$ é isósceles, e, por isso, $D\hat{E}F = E\hat{F}D = 15^o$. Seja M o ponto médio de $[FE]$. Assim, $[DM]$ é a altura do triângulo $[DEF]$ relativamente à base $[FE]$, $\overline{DM} = \overline{DE}\,\mathrm{sen}\ 15^o$ e $\overline{ME} = \overline{DE}\cos 15^o$. Assim, a área do triângulo $[DEF]$ é



$$\frac{\overline{FE} \times \overline{DM}}{2} = \overline{DE}^{\,2}\,\mathrm{sen}\ 15^o \cos 15^o = \frac{1}{2}\,\overline{DE}^{\,2}\,\mathrm{sen}\ 30^o = \frac{\overline{DE}^{\,2}}{4} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{4}.$$

Portanto, a área do triângulo $[DEF]$ é um quarto da área do quadrado $[ABCD]$.

4. Há 9 vértices em cada uma das 9 linhas horizontais que delimitam os quadrados do tabuleiro. O número de maneiras de colorir os vértices da primeira linha é 2^9. Em 2 destas maneiras os vértices da primeira linha estão coloridos de forma alternada e nas restantes $2^9 - 2$ maneiras há, pelo menos, dois vértices consecutivos coloridos com a mesma cor. Considere-se primeiro esta segunda situação, isto é, suponha-se que na primeira linha há, pelo menos, dois vértices consecutivos coloridos com a mesma cor:

$$\cdots \quad A \quad A \quad \cdots \qquad \text{ou} \qquad \cdots \quad V \quad V \quad \cdots \, .$$

Neste caso há só uma maneira de colorir os vértices da segunda linha respeitando as regras:

$$\begin{matrix}\cdots & A & A & \cdots \\ \cdots & V & V & \cdots\end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{matrix}\cdots & V & V & \cdots \\ \cdots & A & A & \cdots\end{matrix}\, .$$

Isto porque, em cada quadrado, estando já três vértices coloridos (não todos com a mesma cor) há só uma maneira de escolher a cor do quarto vértice. Verifica-se assim que, quando na primeira linha há, pelo menos, dois vértices consecutivos coloridos com a mesma cor então só há uma maneira de colorir os vértices da segunda linha. Além disso, na segunda linha há forçosamente dois vértices consecutivos coloridos com a mesma cor. Repetindo o raciociocínio até à linha 9, conclui-se que, neste caso, a escolha das cores dos vértices da primeira linha determina por completo a escolha das cores dos vértices de todo o tabuleiro. Assim, há $2^9 - 2$ maneiras de colorir os vértices de modo que na primeira linha haja vértices consecutivos coloridos com a mesma cor.

Suponha-se agora que os vértices da primeira linha estão coloridos de forma alternada:

$$A \quad V \quad A \quad V \quad A \quad V \quad A \quad V \quad A \qquad \text{ou} \qquad V \quad A \quad V \quad A \quad V \quad A \quad V \quad A \quad V\ .$$

Em cada um destes casos as cores dos vértices na segunda linha podem ser escolhidas de duas maneiras:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & V & A & V & A & V & A & V & A \\ V & A & V & A & V & A & V & A & V \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{ccccccccc} A & V & A & V & A & V & A & V & A \\ A & V & A & V & A & V & A & V & A \end{array}$$

no primeiro caso e

$$\begin{array}{ccccccccc} V & A & V & A & V & A & V & A & V \\ A & V & A & V & A & V & A & V & A \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{ccccccccc} V & A & V & A & V & A & V & A & V \\ V & A & V & A & V & A & V & A & V \end{array}$$

no segundo caso. Em qualquer um destes casos, na segunda linha, as cores continuam a estar alternadas e portanto, em cada caso, há 2 maneiras de colorir os vértices da terceira linha. Repetindo o raciocínio conclui-se que há 2^9 maneiras de colorir os vértices de modo que na primeira linha as cores estejam alternadas.

O número de maneiras de colorir os vértices é então $2^9 - 2 + 2^9 = 2^{10} - 2 = 1022$.