Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXII OPM - 2ª Eliminatória - 21.01.2004 - Categoria B - 10º/12º

http://www.spm.pt/~opm

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. No planeta Produtivix, este ano tem 2004 dias numerados de 1 a 2004 e está dividido em semanas de 7 dias: $2^{\underline{a}}$ vix, $3^{\underline{a}}$ vix, $\ldots$, $6^{\underline{a}}$ vix, Sábavix e Dominvix. Os únicos dias considerados feriados, em que os habitantes de Produtivix não trabalham, são os Dominvix que terminam em 7. Quantos feriados há este ano no planeta Produtivix, se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix?

Solução

2. O João coleccionou fichas com receitas que saíam ao Domingo no jornal. A ficha que saía em cada Domingo continha duas receitas, uma em cada página, e todas as receitas estavam numeradas. Infelizmente, num dos Domingos, já não havia jornal quando o João chegou ao quiosque, ficando assim a faltar uma ficha na sua colecção. No final da colecção o João somou os números de todas as receitas que tinha e obteve 963. Quais são os números das receitas da ficha que lhe faltava?

Solução

3. Com centro em cada um dos vértices de um triângulo equilátero com 2 cm de lado, desenham-se três círculos com $\sqrt{2}$ cm de raio. Qual é a área da intersecção dos três círculos?

Solução

4. Numa Floresta Mágica há tantas casas como duendes. As estradas de uma Floresta Mágica são todas de sentido único e de tal modo que:

   - cada estrada liga duas casas;
   - em cada casa começa exactamente uma estrada;
   - em cada casa termina exactamente uma estrada.

   No primeiro dia de uma Floresta Mágica está um duende em cada casa. Todos os dias, ao pôr do Sol, cada duende sai da casa onde está e vai para a casa vizinha. A Lenda da Floresta Mágica diz que, no dia em que todos os duendes de uma Floresta Mágica voltarem a estar simultaneamente nas suas casas iniciais, essa Floresta Mágica desaparecerá.

   (a) Mostra que, de acordo com a Lenda, nenhuma Floresta Mágica dura eternamente.

   (b) Será que existe uma Floresta Mágica com 41 duendes que dure pelo menos 30000 dias?

Solução

Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:** Se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix então o primeiro Dominvix é dia 4 e os restantes Dominvix são dias do tipo $4+7k,\ k \in \{1,2,3,\ldots,\lfloor \frac{2004-4}{7} \rfloor = 285\}$. Para encontrar um Dominvix que termine em 7, basta encontrar um valor de k tal que $7k$ termine em 3, o que só acontece quando k termina em 9. Como entre 1 e 285 há 28 números que terminam em 9, este ano há 28 feriados no planeta Produtivix.

   Solução 2: Se o dia 1 é uma $5^{\underline{a}}$ vix então o primeiro Dominvix é dia 4 e os restantes Dominvix obtêm-se somando a 4 múltiplos de 7. Assim, o primeiro Dominvix que termina em 7 é $4+63=67$. Uma vez que o primeiro múltiplo de 7 que termina em 0 é 70, a partir do Dominvix dia 67 só há um Dominvix que termina em 7 de 70 em 70 dias. Como $\lfloor \frac{2004-67}{70} \rfloor = 27$, conclui-se que há mais 27 feriados no planeta Produtivix este ano. Portanto, este ano há 28 feriados no planeta Produtivix.

   Nota: Representa-se por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x (exemplos: $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$).

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

2. A soma dos números de todas as receitas da colecção é um número superior a 963. A diferença entre essa soma e 963 é a soma dos dois inteiros consecutivos correspondentes às duas receitas que faltavam ao João, logo, é um número ímpar inferior ao dobro do número da última receita da colecção. Uma vez que cada ficha tem duas receitas, o número de receitas é par. Sendo $2k$ esse número, a soma dos números de todas as receitas da colecção é

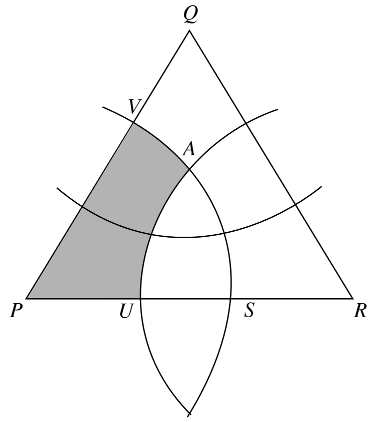
$$1+2+3+\cdots+(2k-1)+2k=\frac{2k+1}{2}\times(2k)=(2k+1)k.$$

Por um lado, tem-se $(2k+1)k>963$ e, por isso, $k>21$. Por outro lado, $(2k+1)k-963<4k$, ou seja, $k<23$. Para $k=22$, tem-se $(2k+1)k=990>963$ e $(2k+1)k-963=990-963=27$, ímpar e inferior ao dobro de 44. Assim, 27 é a soma dos números das duas receitas que faltavam ao João. Portanto, o João não tinha as receitas com os números 13 e 14.

Enunciado da Prova

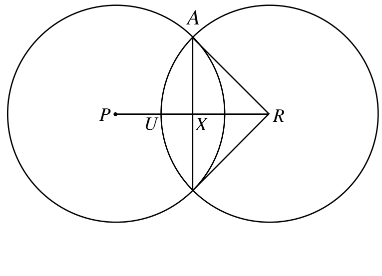
Sugestões para a resolução dos problemas

3. **Solução 1:**



A área da intersecção dos três círculos é a diferença entre a área do triângulo $[PQR]$ e o triplo da área da região sombreada. Uma vez que o triângulo $[PQR]$ é equilátero, a sua altura relativamente ao lado $[PR]$, designada por h, é medida sobre a mediatriz desse lado. Assim, do teorema de Pitágoras, obtém-se $h = \sqrt{3}$ e a área do triângulo $[PQR]$ é $\frac{1}{2}\,\overline{PR} \times h = \sqrt{3}$.

A área da região sombreada é a diferença entre a área do sector circular $[PSV]$ e metade da área da intersecção dos dois círculos centrados em P e R. Uma vez que $Q\widehat{P}R = \frac{\pi}{3}$, a área do sector circular $[PSV]$ é $\frac{\pi}{3}\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\pi} = \frac{\pi}{3}$. A área da intersecção dos dois círculos é o quádruplo da diferença entre a área do sector circular $[RAU]$ e a área do triângulo $[RXA]$.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[RXA]$, e dado que $\overline{XR} = 1$ e $\overline{AR} = \sqrt{2}$, conclui-se que $\overline{AX} = 1$. Assim, o triângulo rectângulo $[RXA]$ é isósceles e, por isso, $A\widehat{R}X = \frac{\pi}{4}$. Então a área do sector circular $[RAU]$ é $\frac{\pi}{4}\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\pi} = \frac{\pi}{4}$. Por outro lado, a área do triângulo $[RXA]$ é $\frac{1}{2}\,\overline{AX} \times \overline{XR} = \frac{1}{2}$. Então a área da intersecção dos dois círculos é $4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. Portanto a área da região sombreada é $\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\pi}{6}$.

Finalmente, a área pretendida é $\sqrt{3} - 3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 3 + \frac{\pi}{2}$ cm^2.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

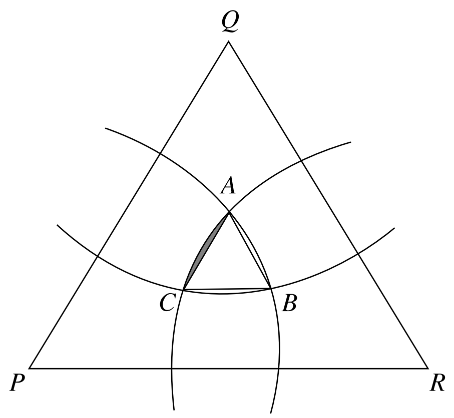
XXII OPM - 2ª Eliminatória - 21.01.2004 - Categoria B - 10º/12º

http://www.spm.pt/~opm

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

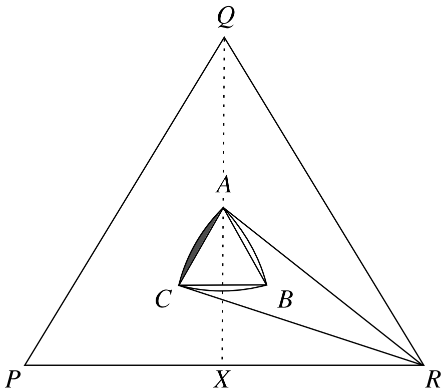
Solução 2:



A área pretendida é a soma da área do triângulo $[ABC]$ com o triplo da área da região sombreada. Considere-se o referencial cartesiano tal que a origem das coordenadas coincide com P e $[PR]$ está sobre a parte positiva do eixo das abcissas. Neste referencial as coordenadas de R são $(2,0)$. Determinem-se as coordenadas de Q. Atendendo a que o triângulo $[PQR]$ é equilátero, conclui-se que Q está sobre a mediatriz de $[PR]$ e a abcissa de Q é 1. Por outro lado, sendo y_Q a ordenada de Q, do teorema de Pitágoras resulta que $1^2 + y_Q^2 = \overline{PQ}^2 = 4$ e portanto $y_Q = \sqrt{3}$. Assim, as coordenadas de Q são $(1, \sqrt{3})$. Determinem-se agora as coordenadas dos pontos A e C. Uma vez que A está a igual distância de P e de R, A está sobre a mediatriz de $[PR]$ e portanto a abcissa de A é 1. Por outro lado, A está sobre a circunferência de centro $P = (0,0)$ e raio $\sqrt{2}$, cuja equação é $x^2+y^2 = 2$. Assim, a ordenada de A é a solução positiva de $1^2+y^2 = 2$. Portanto, as coordenadas de A são $(1,1)$. Designem-se as coordenadas de C por (x_C, y_C). Uma vez que C está sobre a mediatriz de $[QR]$, que coincide com a bissectriz de $\measuredangle QPR$, tem-se $C\widehat{P}R = \frac{\pi}{6}$. Por outro lado, $\overline{PC} = \overline{AQ} = \sqrt{3} - 1$. Então $x_C = \overline{PC} \cos \frac{\pi}{6} = (\sqrt{3} - 1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ e $y_C = \overline{PC}\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, ou seja, $C = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Assim, $\overline{AC} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. Uma vez que também o triângulo $[ABC]$ é equilátero, a sua área é $\frac{1}{2}\,\overline{BC} \times \overline{AC} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.

(continua na página seguinte)

Sugestões para a resolução dos problemas



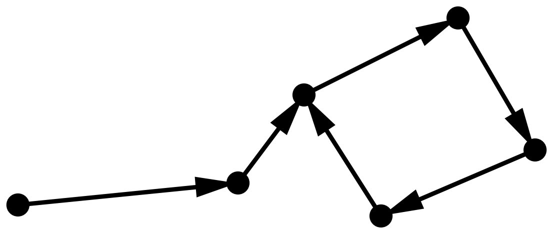
Determine-se agora $A\widehat{R}C$. O triângulo rectângulo $[ARX]$ é isósceles, logo $A\widehat{R}P = \frac{\pi}{4}$. Então $Q\widehat{R}A = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ e $P\widehat{R}C = Q\widehat{R}A = \frac{\pi}{12}$. Assim, $A\widehat{R}C = A\widehat{R}P - C\widehat{R}P = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ e a área do sector circular $[RCA]$ é $\frac{\frac{\pi}{6}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\pi} = \frac{\pi}{6}$. Determine-se agora a área do triângulo $[RCA]$. Atendendo ao teorema de Pitágoras, a sua altura relativamente ao lado $[AC]$ é $\sqrt{\overline{AR}^2 - \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Então a área do triângulo $[RCA]$ é $\frac{1}{2}$. Assim, a área da região sombreada é $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$.

Portanto a área da intersecção dos três círculos é $\sqrt{3} - \frac{3}{2} + 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 3 + \frac{\pi}{2}$ cm^2.

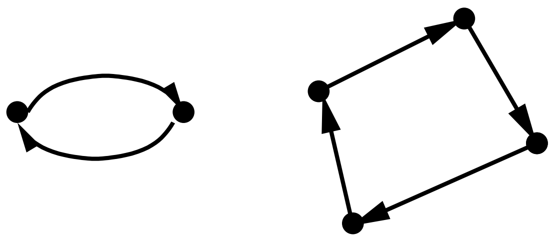
Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Cada duende acaba por voltar a passar na sua casa inicial. Na verdade, como existe um número finito de casas e todos os dias os duendes mudam de casa (o que é possível já que de cada casa sai uma estrada), cada duende passará, um dia, por uma casa onde já tinha estado. Numa Floresta Mágica com s duendes, para cada duende i, $i = 1, \ldots, s$, seja n_i o número de dias que ele demora até passar, pela primeira vez, por uma casa onde já tinha estado. Então essa casa é necessariamente a casa onde ele tinha estado inicialmente, caso contrário, como se indica na figura, terminariam nessa casa duas estradas: a que acabou de percorrer e a que tinha percorrido quando lá chegou pela primeira vez.



Assim, para cada duende i, n_i é o número de dias que ele demora até passar pela primeira vez na sua casa inicial, ou seja, o duende i desloca-se num ciclo formado por n_i casas e n_i estradas. Na figura seguinte apresenta-se um exemplo de uma Floresta Mágica com 6 duendes e 6 casas.



Conclui-se assim que todos os duendes voltarão a estar simultaneamente nas suas casas iniciais após m.m.c. $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ dias e, de acordo com a Lenda, a Floresta Mágica desaparecerá.

(b) Considere-se a Floresta Mágica com 41 duendes que tem exactamente um ciclo com 2 casas, um ciclo com 3 casas, um ciclo com 5 casas, um ciclo com 7 casas, um ciclo com 11 casas e um ciclo com 13 casas. Esta Floresta Mágica desaparecerá após m.m.c. $(2, 3, 5, 7, 11, 13) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30030$ dias.

Enunciado da Prova