Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXII OPM - 1ª Eliminatória - 12.11.2003 - Categoria A - 8º/9º

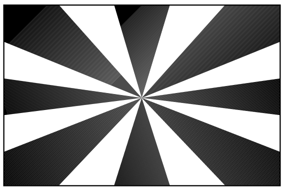
http://www.spm.pt/~opm

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A mãe da Ana Margarida vende doces e pediu-lhe que embrulhasse 2003 rebuçados de 5 cores diferentes em pacotes de 3, de forma que em cada pacote os rebuçados fossem da mesma cor. Como recompensa prometeu-lhe que poderia comer os rebuçados que restassem quando já não fosse possível fazer mais embrulhos. Sabendo que, dos 2003 rebuçados, 388 eram brancos, 396 amarelos, 405 vermelhos, 406 verdes e 408 castanhos, quantos rebuçados pôde a Ana Margarida comer e de que cor eram? Solução

2. O Tó Mané é adepto do *Futebol Clube Tácebem* e resolveu fazer uma bandeira para apoiar a sua equipa no jogo contra o *Desportivo do YéYé*. Comprou um pano branco rectangular com 1 m^2 de área, dividiu cada um dos lados em cinco partes iguais, marcou o centro do rectângulo e pintou o pano da forma indicada na figura. Qual é a área de pano que ficou por pintar?



Solução

3. Na sala de jantar do restaurante do Júlio, com capacidade para 90 pessoas, as mesas eram todas iguais. Ao remodelar o restaurante o Júlio colocou mesas maiores, também todas iguais. Em cada uma das mesas novas podem sentar-se mais 3 pessoas do que nas antigas. Desta forma, e com menos 5 mesas, o Júlio conseguiu manter a capacidade da sala. Quantas pessoas se podem sentar em cada uma das mesas novas?

Solução

4. A Mariana, o Zé, o Pedro e a Rita formaram um clube secreto. Para se ter acesso a cada reunião é preciso saber uma senha, decidida na reunião anterior. Cada senha é formada por 3 símbolos escolhidos de entre os 10 seguintes.

$$\square \quad \triangle \quad \bigcirc \quad - \quad + \quad \times \quad \clubsuit \quad \diamondsuit \quad \heartsuit \quad \spadesuit$$

Como o Pedro tem má memória os quatro amigos decidiram que a ordem dos símbolos em cada senha não interessa. Quantas senhas distintas podem os quatro amigos construir?

Solução

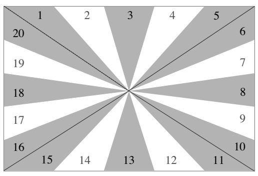
Sugestões para a resolução dos problemas

1. Para cumprir a tarefa que lhe foi destinada, a Ana Margarida embrulhou todos os possíveis grupos de 3 rebuçados da mesma cor. Como 396, 405 e 408 são múltiplos de 3, não lhe sobraram rebuçados amarelos, vermelhos e castanhos. Por outro lado, como $388 = 129 \times 3 + 1$ e $406 = 135 \times 3 + 1$, sobrou-lhe um rebuçado branco e outro verde. Assim, a Ana Margarida pôde comer 2 rebuçados, um branco e o outro verde.

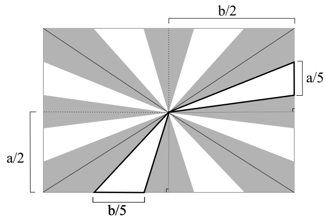
Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

2. Em primeiro lugar observe-se que a bandeira pode ser dividida em 20 triângulos (8 brancos e 12 pintados) como indicado na figura (i).



(i)



(ii)

Solução 1: Determine-se a área de cada um dos triângulos. Sejam a e b as medidas dos lados do rectângulo. Tome-se como base de cada um dos 10 triângulos 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15 o lado que está sobre o lado do rectângulo. Assim, os 10 triângulos têm $\frac{b}{5}$ de base e $\frac{a}{2}$ de altura, logo, a área de cada um deles é $\frac{1}{2} \times \frac{b}{5} \times \frac{a}{2} = \frac{ba}{20} = \frac{1}{20}$. Analogamente, tome-se como base de cada um dos restantes triângulos, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19 e 20, o lado que está sobre o lado do rectângulo. Deste modo, os 10 triângulos têm $\frac{a}{5}$ de base e $\frac{b}{2}$ de altura, logo, a área de cada um deles também é $\frac{ba}{20} = \frac{1}{20}$. Portanto, os 20 triângulos têm todos a mesma área. Uma vez que há 8 triângulos por pintar, a área de pano que o Tó Mané não pintou é $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$ m^2.

Solução 2: Tome-se como base de cada um dos 10 triângulos 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15 o lado que está sobre o lado do rectângulo. Assim, os 10 triângulos têm a mesma base e a mesma altura, logo, a mesma área. Como 4 destes 10 não estão pintados, $\frac{2}{5}$ da área abrangida por estes 10 triângulos não está pintada. Analogamente, tome-se como base de cada um dos restantes triângulos, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19 e 20, o lado que está sobre o lado do rectângulo. Deste modo, os 10 triângulos têm a mesma base e a mesma altura, logo, a mesma área. Como 4 destes 10 não estão pintados, $\frac{2}{5}$ da área abrangida por estes 10 triângulos não está pintada. Portanto, $\frac{2}{5}$ da área do rectângulo não está pintada e conclui-se que o Tó Mané não pintou $0,4$ m^2 de pano.

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

3. **Solução 1:** Note-se que $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Então, os seus divisores são 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90. A tabela abaixo mostra os valores possíveis para o número de mesas e a capacidade de cada mesa.

Capacidade de cada mesa	1	2	3	5	6	9	10	15	18	30	45	90
Número de mesas	90	45	30	18	15	10	9	6	5	3	2	1

Os pares de números da primeira linha que têm uma diferença de 3 entre si são: 2 e 5, 3 e 6, 6 e 9, 15 e 18. Para estes valores o número de mesas necessário é, respectivamente, 45 e 18, 30 e 15, 15 e 10, 6 e 5. Uma vez que, com as mesas novas, são necessárias menos 5 mesas, o que corresponde apenas ao par de 15 e 10 mesas, conclui-se que a solução é dada pelo par de números 6 e 9. Portanto, podem sentar-se 9 pessoas em cada uma das mesas novas.

Solução 2: Designe-se por x a capacidade de cada mesa nova. Então $\frac{90}{x}$ é o número de mesas novas. Assim, a capacidade de cada mesa antiga é $x - 3$ e o número de mesas antigas $\frac{90}{x-3}$. Logo, $\frac{90}{x-3} = \frac{90}{x} + 5$, o que é equivalente a $x(x - 3) = 54$. Deste modo, x e $x - 3$ são divisores de 54. Uma vez que $54 = 2 \times 3^3$, os seus divisores são 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 e 54. Conclui-se que $x = 9$ é a solução inteira positiva da equação. Portanto, podem sentar-se 9 pessoas em cada uma das mesas novas.

Solução 3: Designe-se por x a capacidade de cada mesa nova. Então $\frac{90}{x}$ é o número de mesas novas. Assim, a capacidade de cada mesa antiga é $x - 3$ e o número de mesas antigas $\frac{90}{x-3}$. Logo, $\frac{90}{x-3} = \frac{90}{x} + 5$, o que é equivalente a $x^2 - 3x = 54$. Adicionando $\frac{9}{4}$ a ambos os membros da equação, obtém-se $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{225}{4}$, cuja solução positiva é $x = \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = 9$. Portanto, podem sentar-se 9 pessoas em cada uma das mesas novas.

Enunciado da Prova

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Cada senha é constituída por 3 símbolos escolhidos de entre os 10 dados. Existem 3 possibilidades: uma senha pode ser formada por 3 símbolos iguais, dois símbolos iguais e um terceiro distinto, ou três símbolos distintos.

   Com 3 símbolos iguais podem ser formadas 10 senhas distintas.

   Contem-se agora as senhas em que aparecem exactamente dois símbolos, estando um repetido. Esse símbolo pode ser escolhido de 10 maneiras e o outro símbolo pode ser escolhido de 9 maneiras. Assim, com dois símbolos iguais e um terceiro distinto podem ser formadas $10 \times 9 = 90$ senhas.

   Falta contar o número de senhas que podem ser formadas com 3 símbolos distintos. Para escolher o primeiro símbolo há 10 hipóteses, para escolher o segundo há 9 hipóteses e para escolher o terceiro há 8 hipóteses. Assim, há $10 \times 9 \times 8 = 720$ sequências distintas que podem ser construídas com 3 símbolos, diferentes 2 a 2, escolhidos de entre os 10 que são dados. Mas nestas sequências a ordem dos símbolos interessa, o que não acontece nas senhas. Com uma senha constituída por três símbolos distintos podem ser formadas $3 \times 2 \times 1 = 6$ sequências distintas. Assim, quando se fez a contagem das sequências contou-se cada senha 6 vezes. Portanto, com três símbolos diferentes 2 a 2 podem ser formadas $\frac{720}{6} = 120$ senhas distintas.

   Os 4 amigos podem construir $10 + 90 + 120 = 220$ senhas distintas.

Enunciado da Prova