Sugestões para a resolução de problemas

4. Sejam O o centro da circunferência e P o ponto de intersecção de $[AD]$ com $[OB]$. Note-se que $A\hat{O}B = \frac{\pi}{5}$, $B\hat{O}D = \frac{2\pi}{5}$ e $A\hat{O}D = \frac{3\pi}{5}$. Uma vez que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = r$, os triângulos $[AOB]$ e $[AOD]$ são isósceles, logo $B\hat{A}O = O\hat{B}A = \frac{2\pi}{5}$ e $D\hat{A}O = O\hat{D}A = \frac{\pi}{5}$. Assim, conclui-se que $B\hat{A}P = \frac{\pi}{5}$ e, por isso, $A\hat{P}B = \frac{2\pi}{5}$. Como $\measuredangle PBA = \measuredangle APB$, o triângulo $[APB]$ é isósceles com $\overline{AP} = \overline{AB}$. Por outro lado, $D\hat{P}O = \frac{2\pi}{5} = P\hat{O}D$, ou seja, o triângulo $[ODP]$ é isósceles com $\overline{PD} = \overline{OD} = r$. Deste modo, conclui-se que

$$\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{AD} - \overline{AP} = \overline{PD} = r.$$

O percurso descrito pela Figura 1 mede $10\overline{AB}$ e o percurso representado na Figura 2 mede $10\overline{AD}$, logo, este ano, o padre irá andar mais $10\overline{AD} - 10\overline{AB} = 10r$ metros.

5. O problema consiste em determinar as soluções positivas da equação

$$\lfloor\frac{k}{2}\rfloor + \lfloor\frac{k}{3}\rfloor + \lfloor\frac{k}{5}\rfloor = k.$$

Solução 1: Escrevendo k na forma $k = 30p + q$, onde p e q são inteiros e $0 \leq q < 30$, a equação anterior é equivalente a

$$31p + \lfloor\frac{q}{2}\rfloor + \lfloor\frac{q}{3}\rfloor + \lfloor\frac{q}{5}\rfloor = 30p + q,$$

ou ainda a

$$p = q - \lfloor\frac{q}{2}\rfloor - \lfloor\frac{q}{3}\rfloor - \lfloor\frac{q}{5}\rfloor.$$

Logo, para cada q, existe um p que satisfaz a equação anterior. Uma vez que q pode tomar 30 valores distintos, existem 30 soluções distintas:

q	p	k	q	p	k	q	p	k
0	0	0	10	0	10	20	0	20
1	1	31	11	1	41	21	0	21
2	1	32	12	0	12	22	0	22
3	1	33	13	1	43	23	1	53
4	1	34	14	1	44	24	0	24
5	1	35	15	0	15	25	0	25
6	0	6	16	0	16	26	0	26
7	1	37	17	1	47	27	0	27
8	1	38	18	0	18	28	0	28
9	1	39	19	1	49	29	1	59

Finalmente, os valores possíveis (não nulos) para k são: 6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 47, 49, 53, 59.

Solução 2: Sejam $a = k \pmod 2$, $b = k \pmod 3$ e $c = k \pmod 5$. A equação anterior é equivalente a

$$\frac{k-a}{2} + \frac{k-b}{3} + \frac{k-c}{5} = k,$$

ou ainda a

$$k = 15a + 10b + 6c.$$

Assim, os valores possíveis para k são obtidos pela igualdade anterior, tomando $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ e $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, com pelo menos um deles não nulo.

6. Prove-se inicialmente que dados três números irracionais existem dois cuja soma é um número irracional. Sejam y_1, y_2 e y_3 números irracionais. Se a soma de quaisquer dois destes três números fosse racional, então, em particular, $y_1 + y_2$ e $y_2 + y_3$ seriam números racionais e, consequentemente, a sua diferença, $y_1 - y_3$, também. Por outro lado, somando este último número a $y_3 + y_1$, obter-se-ia igualmente um número racional. Mas $(y_1 - y_3) + (y_3 + y_1) = 2y_1$ não é um racional pois, por hipótese, y_1 é irracional. Portanto, existem dois destes três números cuja soma é um número irracional.

   Considerem-se agora seis números irracionais. Designe-se por x um desses números e dividam-se os restantes cinco em dois conjuntos: um conjunto A formado por aqueles cuja soma com x é um número irracional e um conjunto B constituído por aqueles cuja soma com x é um racional. Aplicando o chamado *Princípio de Dirichlet* (ou *Princípio do Pombal*), conclui-se que um dos conjuntos tem pelo menos três elementos. Suponha-se que é o conjunto A. Então existem dois elementos de A cuja soma é um número irracional. Assim, o terno definido por estes dois elementos e pelo elemento x é o pretendido. Suponha-se agora que é o conjunto B que tem pelo menos três elementos. Considerando agora o conjunto formado por quaisquer dois elementos de B e pelo elemento x, conclui-se que a soma de quaisquer dois elementos de B é irracional. Portanto, basta escolher três elementos de B para obter o terno de números pretendido.