XXI OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
2ª Eliminatória

22/01/2003

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. O Victor, o Timóteo e o Rodrigo, colocados em fila, não necessariamente por esta ordem, dizem números de 3 em 3: o primeiro da fila diz 3, o segundo 6, o terceiro 9, o primeiro 12 e assim sucessivamente. O Victor foi o primeiro a dizer um número superior ou igual a 2003 e o Rodrigo foi o primeiro a dizer um número com 4 dígitos. Será que foi o Timóteo que disse 666?

2. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências concêntricas de raios r e R, respectivamente, com $r < R$. Os pontos A, B e C, distintos dois a dois, pertencem a $\mathcal{C}_2$ e as cordas $[AB]$ e $[AC]$ são tangentes a $\mathcal{C}_1$. Sabendo que $R = 5$ e $\overline{BC} = 8$, determine o raio de $\mathcal{C}_1$.

3. O chão da sala rectangular do Mateus está pavimentado com mosaicos quadrados e tem 423 por 756 mosaicos de lado. Certo dia, ao mudar a disposição dos móveis, o Mateus fez um risco no chão em linha recta entre dois cantos opostos. Quantos mosaicos terá o Mateus de comprar para substituir os mosaicos riscados?

4. O número 5 decompõe-se na soma de 2 números inteiros primos entre si e diferentes de 1, $5 = 2+3$, mas o número 6 não admite tal decomposição. Existirá algum número inteiro superior a 6 que não se possa escrever como soma de 2 números inteiros primos entre si e diferentes de 1?

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

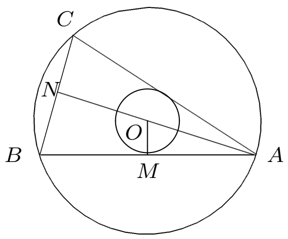
---

1. O primeiro da fila diz os números inteiros cujo resto da divisão por 9 é 3: 3, 12, 21, 30, 39, ... O segundo da fila diz os números inteiros cujo resto da divisão por 9 é 6: 6, 15, 24, 33, 42, ... O terceiro da fila diz os números inteiros múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, ... Ora $666 = 9 \times 74$, então foi o terceiro da fila que disse 666. Como os 3 amigos só dizem múltiplos de 3, o primeiro número superior ou igual a 2003 a ser dito foi $2004 = 9 \times 222 + 6$. Assim, sabendo que o Victor disse 2004, conclui-se que ele é o segundo da fila. Se o Rodrigo foi o primeiro a dizer um número com 4 dígitos, então foi ele que disse $1002 = 9 \times 111 + 3$, sendo assim o primeiro da fila. Portanto, o Timóteo é necessariamente o terceiro da fila e, de facto, foi ele que disse 666.

2. Sejam M o ponto de tangência de $[AB]$ com $\mathcal{C}_1$ e O o centro das duas circunferências. O segmento $[OM]$ é perpendicular a $[AB]$. Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos rectângulos $[OMA]$ e $[BMO]$, conclui-se que M é o ponto médio de $[AB]$. Analogamente, o ponto de tangência de $[AC]$ com $\mathcal{C}_1$, M', é o ponto médio de $[AC]$. Como $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $[OA]$ é hipotenusa comum aos triângulos rectângulos $[OMA]$ e $[OAM']$, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{MA} = \overline{AM'}$ e estes triângulos rectângulos são congruentes. Logo, os ângulos $\measuredangle MAO$ e $\measuredangle OAM'$ têm a mesma amplitude. A recta que passa por A e O intersecta a corda $[BC]$ num ponto N. Os triângulos $[BAN]$ e $[NAC]$ são congruentes, uma vez que $\measuredangle MAO$ e $\measuredangle OAM'$ têm a mesma amplitude, $[AN]$ é lado comum e $\overline{BA} = 2\overline{MA} = 2\overline{AM'} = \overline{AC}$. Então, $\overline{BN} = \overline{NC}$, isto é, N é o ponto médio de $[BC]$.

Solução 1

O triângulo $[ANB]$ é rectângulo em N e semelhante ao triângulo $[OMA]$, porque têm os três ângulos congruentes. Assim, $\frac{\overline{OM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BA}}$. Sabe-se que $\overline{OM} = r$, $\overline{BN} = 4$, $\overline{OA} = R = 5$, $\overline{BA} = 2\overline{MA}$, logo, tem-se $r = \frac{10}{\overline{MA}}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[OMA]$, obtém-se a equação $r^2 + (\frac{10}{r})^2 = 25$. As soluções desta equação são $r = 2\sqrt{5}$ ou $r = \sqrt{5}$. Uma vez que $\frac{\overline{OA}}{\overline{BA}} < 1$, $\overline{OM} = r < 4$. Conclui-se então que $r = \sqrt{5}$.

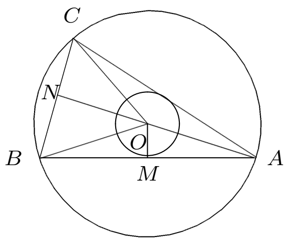


Solução 2

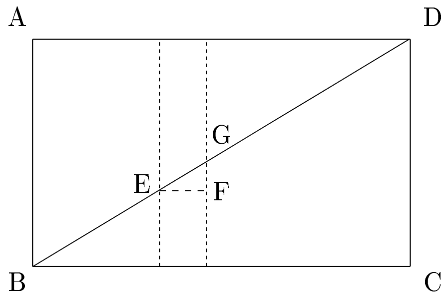
O segmento $[BC]$ é uma corda da circunferência $\mathcal{C}_2$ de raio $R = 5$. Uma vez que $\overline{BC} = 8$, a amplitude do arco BC é $\frac{8\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$. A amplitude do ângulo inscrito $\measuredangle BAC$ é assim $\frac{2\pi}{5}$ e a amplitude de $\measuredangle BAO$ é $\frac{\pi}{5}$. O raio r de $\mathcal{C}_1$ será igual a $\overline{OM} = R \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$. Resta então

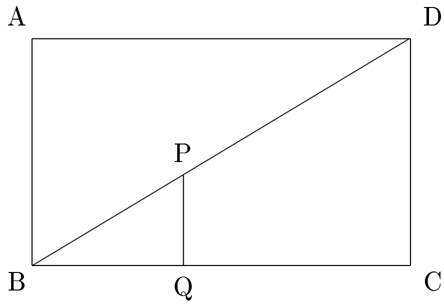
---

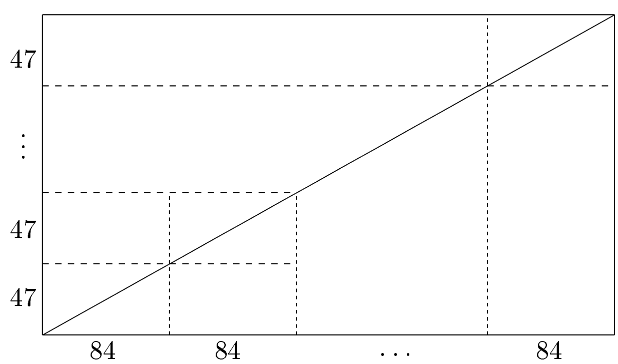
determinar $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$. O triângulo $[BNO]$ é rectângulo em N e a amplitude de $\measuredangle BON$ é $\frac{2\pi}{5}$. Como $\overline{BO}=5$ e $\overline{BN}=4$, obtém-se $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{4}{5}$, logo $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{3}{5}$. Usando agora a igualdade $\cos(2x)=1-2\operatorname{sen}^2 x$, tem-se $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Finalmente, $r=\sqrt{5}$.



3. Considere-se o rectângulo $[ABCD]$ com 423 por 756 de lado dividido em quadrículas com 1 unidade de lado. O rectângulo $[ABCD]$ representa o chão da sala, cada quadrícula um mosaico e $[BD]$ o risco. Designe-se cada fila de 756 quadrículas, paralela a $[BC]$, por linha e cada fila de 423 quadrículas, paralela a $[AB]$, por coluna. Prove-se que o risco atravessa, em cada coluna, uma ou duas quadrículas. Considerem-se os pontos E, F e G indicados na figura, onde $[EG]$ é a intersecção de $[BD]$ com uma coluna e F é o ponto de intersecção da recta que passa por E e é paralela a $[BC]$ com a recta que passa por G e é paralela a $[CD]$. Atendendo a que os triângulos $[EFG]$ e $[BCD]$ são semelhantes, tem-se $\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{423}{756}<1$ e, como $\overline{EF}=1$, conclui-se que $\overline{FG}<1$. Assim, o risco atravessa, em cada coluna, uma ou duas quadrículas e só atravessa duas quadrículas na mesma coluna se mudar de linha nessa coluna. Cada mudança de linha do risco corresponde a uma coluna com duas quadrículas riscadas, excepto no caso em que o risco muda de linha num vértice de uma quadrícula. Determine-se agora o número de vértices nestas condições. Seja P um vértice de quadrícula pertencente ao risco e diferente de B. Considere-se o triângulo $[BQP]$ rectângulo em Q, representado na figura. Como os triângulos $[BQP]$ e $[BCD]$ são semelhantes, tem-se $\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}=\frac{423}{756}$. Além disso, pela escolha de P, $\overline{PQ}$ e $\overline{BQ}$ são números inteiros inferiores ou iguais a 423 e 756, respectivamente. Observe-se ainda que qualquer ponto pertencente ao risco que satisfaça as condições indicadas é vértice de uma quadrícula. Como $423=9\times 47$, $756=9\times 84$ e $m.d.c.\{47,84\}=1$, tem-se $\frac{423}{756}=\frac{9\times 47}{9\times 84}=\frac{8\times 47}{8\times 84}=\ldots=\frac{2\times 47}{2\times 84}=\frac{47}{84}$. Donde se conclui que o número de vértices de quadrículas pertencentes ao risco e diferentes de B é exactamente 9. Por isso, ao atravessar o rectângulo dum vértice ao outro, o risco atravessa 9 sub-rectângulos 47×84, dum vértice ao outro, como se indica na figura. Assim, em cada sub-rectângulo, existem $47-1=46$ mudanças de linha do risco, logo, o número de quadrículas riscadas é $84+46=130$. Consequentemente, o Mateus terá de comprar $9\times 130=1170$ mosaicos para substituir os mosaicos riscados.







Nota: Observe-se que $\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$ é o declive da recta que contém $[BD]$.

4. Seja n um número inteiro superior a 6. Se n é um número ímpar, pode escrever-se como soma de 2 números primos entre si e superiores a 1 da seguinte forma, $n = (n-2)+2$. De facto, como $n-2$ é um número ímpar, os números $n-2$ e 2 são primos entre si. Considere-se agora n um número par. Designe-se por k o número inteiro superior a 3 que verifica $n = 2k$. Se k é um número par, prove-se que n se pode decompor como soma de 2 números primos entre si e superiores a 1 do seguinte modo, $n = (k-1)+(k+1)$. Com efeito, se r fosse um número inteiro diferente de 1 e divisor comum dos números $k-1$ e $k+1$, também dividiria a sua diferença e, como $(k+1)-(k-1) = 2$, ter-se-ia $r = 2$ e os números $k+1$ e $k-1$ seriam pares. Mas isso não é possível, porque k é um número par. Assim, $k-1$ e $k+1$ são números primos entre si. Finalmente, suponha-se que k é um número ímpar. Escreva-se $n = (k-2)+(k+2)$. Novamente, os números $k-2$ e $k+2$ são ambos ímpares e diferentes de 1 e, como a sua diferença é igual a 4, conclui-se, de modo análogo ao caso anterior, que são números primos entre si. Assim, não existe nenhum número inteiro superior a 6 que não se possa escrever como soma de 2 números inteiros primos entre si e diferentes de 1.