XXI OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
2ª Eliminatória

22/01/2003

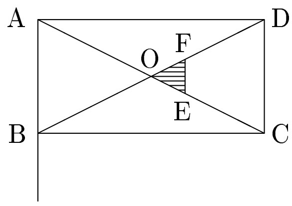
OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/~opm

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

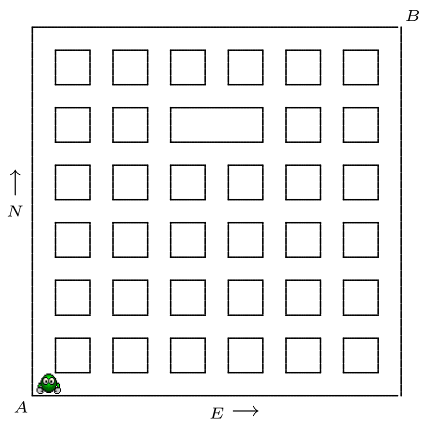
1. O Clube do Triângulo confeccionou a bandeira rectangular de 80 por 40 cm de lado representada na figura. Sabendo que $[EF]$ é paralelo a $[CD]$ e mede 20 cm, qual é a medida da área de tecido gasto no triângulo $[OEF]$?



2. Dois barcos fazem a ligação entre Cacilhas e o Cais do Sodré: o Europa, mais recente e mais rápido e o Adamastor, mais antigo e mais lento. Quando o Adamastor sai de Cacilhas às 9 horas e o Europa sai do Cais do Sodré exactamente à mesma hora cruzam-se às 9 horas e 10 minutos. Mas se o Adamastor sair de Cacilhas às 9 horas e o Europa só sair do Cais do Sodré às 9 horas e 16 minutos cruzam-se às 9 horas e 20 minutos. Supondo que cada um dos barcos se desloca a velocidade constante, quanto tempo demora o Europa a fazer a ligação entre o Cais do Sodré e Cacilhas?

3. O Victor, o Timóteo e o Rodrigo, colocados em fila, não necessariamente por esta ordem, dizem números de 3 em 3: o primeiro da fila diz 3, o segundo 6, o terceiro 9, o primeiro 12 e assim sucessivamente. O Victor foi o primeiro a dizer um número superior ou igual a 2003 e o Rodrigo foi o primeiro a dizer um número com 4 dígitos. Será que foi o Timóteo que disse 666?

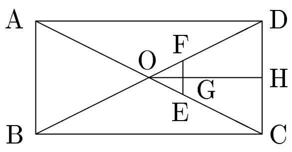
4. Para jogares o jogo do Glutão  tens de o deslocar da posição A até à posição B. Quando o Glutão se dirige para Sul ou para Oeste perdes pontos. De quantas maneiras diferentes podes deslocar o Glutão de A até B de modo a não perderes pontos?



SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

---

1. Considere-se o ponto H indicado na figura de modo que $[OH]$ seja paralelo a $[AD]$. Como o triângulo $[AOD]$ é isósceles de base $[AD]$ e $\overline{AD} = 80$, tem-se $\overline{OH} = 40$. Seja G o ponto de intersecção de $[OH]$ com $[EF]$. Os triângulos $[OEF]$ e $[OCD]$ são isósceles de bases $[EF]$ e $[CD]$, respectivamente, logo, G e H são os pontos médios dos segmentos $[EF]$ e $[CD]$, respectivamente, e, assim, $\overline{FG} = 10$ e $\overline{DH} = 20$. Além disso, os triângulos $[OGF]$ e $[OHD]$ são semelhantes, porque têm os três ângulos congruentes. Assim, $\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{DH}}$ e, por isso, $\overline{OG} = 20$. Logo, a área do triângulo $[OEF]$ mede $\frac{\overline{EF} \times \overline{OG}}{2} = 200$. Portanto, a medida da área de tecido gasto no triângulo $[OEF]$ é 200 cm^2.

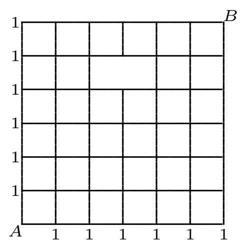


2. Quando o Europa sai do Cais do Sodré 16 minutos depois do Adamastor sair de Cacilhas, os barcos demoram exactamente 4 minutos a cruzar-se. Quando saem os dois à mesma hora o Europa cruza-se com o Adamastor ao fim de 10 minutos. Portanto, o Europa precisa de $10 - 4 = 6$ minutos para percorrer o caminho entre os dois locais de encontro. Mas o Adamastor percorre essa mesma distância em $20 - 10 = 10$ minutos. Assim, conclui-se que o Europa percorre em 6 minutos a distância que o Adamastor percorre em 10 minutos. Portanto, o Europa demora $10 + 6 = 16$ minutos a fazer a ligação entre o Cais do Sodré e Cacilhas.

3. O primeiro da fila diz os números inteiros cujo resto da divisão por 9 é 3: 3, 12, 21, 30, 39, ... O segundo da fila diz os números inteiros cujo resto da divisão por 9 é 6: 6, 15, 24, 33, 42, ... O terceiro da fila diz os números inteiros múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, ... Ora $666 = 9 \times 74$, então foi o terceiro da fila que disse 666. Como os 3 amigos só dizem múltiplos de 3, o primeiro número superior ou igual a 2003 a ser dito foi $2004 = 9 \times 222 + 6$. Assim, sabendo que o Victor disse 2004, conclui-se que ele é o segundo da fila. Se o Rodrigo foi o primeiro a dizer um número com 4 dígitos, então foi ele que disse $1002 = 9 \times 111 + 3$, sendo assim o primeiro da fila. Portanto, o Timóteo é necessariamente o terceiro da fila e, de facto, foi ele que disse 666.

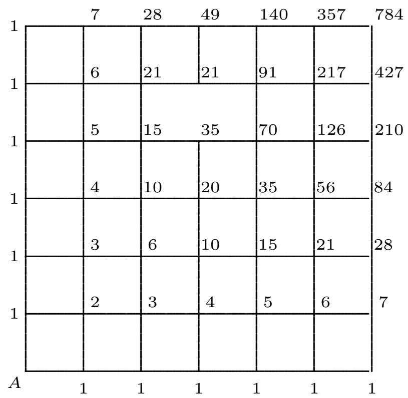
4. Observe-se que, para não perder pontos, o Glutão tem necessariamente de se deslocar para Norte "N" ou para Este "E".

   Solução 1: Verifica-se facilmente que só existe um caminho para ir de A a cada um dos entroncamentos ou à direita de A ou acima de A, como se indica na figura. Por outro lado, qualquer caminho que passe por um certo entroncamento P passa necessariamente por um dos entroncamentos adjacentes a P a Oeste ou a Sul de P.



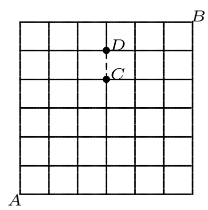
Logo, o número de caminhos possíveis para chegar a P é igual à soma do número de caminhos possíveis para chegar a cada um desses entroncamentos adjacentes. Note-se que pode existir apenas um entroncamento adjacente a P.

Assim, calculando o número de caminhos possíveis para chegar a cada entroncamento, pelo processo indicado, entroncamento a entroncamento, conclui-se que existem 784 caminhos diferentes.



Solução 2:

Considerem-se os entroncamentos C e D representados na figura. Se existisse o caminho a tracejado entre C e D, qualquer que fosse o trajecto escolhido de A para B, o Glutão teria de se dirigir para Norte em exactamente 6 entroncamentos e para Este em outros 6. Então, o número de trajectos possíveis seria igual ao número de palavras de 12 letras que é possível escrever com 6 $E's$ e 6 $N's$. Existiriam portanto $\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6\times 5\times 4\times 3\times 2} = 924$ possibilidades.



Como não existe esse caminho, o número de trajectos possíveis de A para B é obtido retirando ao valor anterior o número de trajectos que passam por C e D. Para se deslocar de A até C o Glutão tem de se dirigir para Este em exactamente 3 entroncamentos e para Norte em outros 4. Assim, o número de trajectos até ao entroncamento C é dado por $\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2} = 35$. Este número é precisamente igual ao número de trajectos para se chegar a D passando obrigatoriamente por C. Para se deslocar de D a B existem 4 possibilidades. Assim, o número de trajectos que passam por C e D é $4 \times 35 = 140$.

Consequentemente, o número total de trajectos possíveis de A para B, sem perder pontos, é $924 - 140 = 784$.