XXI OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/∼opm

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

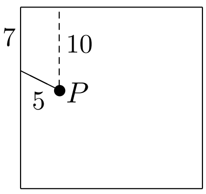
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. O Luís vai participar nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática e, como pretende ter uma boa classificação, elaborou o seguinte plano de preparação: nos primeiros dois dias resolver alguns exercícios e em cada um dos restantes dias resolver tantos exercícios quantos os resolvidos no total dos dois dias anteriores. Sabendo que o Luís cumpriu este plano de segunda a sábado e resolveu 16 exercícios no sábado, quantos resolveu em cada um dos restantes dias?

Solução

2. O Domingos dividiu uma folha de papel quadrada, com 20 cm de lado, em 5 pedaços de igual área. O primeiro corte de comprimento 5 cm teve início na fronteira do papel a 7 cm de um canto e prolongou-se até ao ponto P, que dista 10 cm de um dos lados do quadrado, como indicado na figura seguinte.



Solução

Se o Domingos fez todos os outros cortes em linha recta a partir do ponto P, de que forma cortou o papel?

3. A Andreia escreveu, por ordem crescente, todos os números inteiros de 1 a 2002 e obteve o número MONSTRO

$$123456789101112131415\ldots 19981999200020012002.$$

Qual é o dígito central deste número?

Solução

4. Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível?

Solução

XXI OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

SUGESTÕES para a resolução do problema.

---

1. **Solução 1:** Seja X o número de exercícios que o Luís resolveu na sexta. Como o número de exercícios que ele resolveu no sábado é igual à soma do número de exercícios resolvidos na quinta e na sexta, então, o Luís resolveu $16 - X$ exercícios na quinta. De igual modo se conclui que o Luís resolveu $2X - 16$ exercícios na quarta, $32 - 3X$ na terça e $5X - 48$ na segunda. Por outro lado, todos estes valores são números inteiros positivos e, portanto, $X = 10$. Assim, conclui-se que o Luís resolveu 2 exercícios na segunda, 2 na terça, 4 na quarta, 6 na quinta e 10 na sexta.

   Solução 2: Sejam S e T o número de exercícios que o Luís resolveu na segunda e na terça, respectivamente. Na quarta o Luís resolveu $S + T$ exercícios, na quinta $T + (S + T) = S + 2T$, na sexta $(S + T) + (S + 2T) = 2S + 3T$ e no sábado $(S + 2T) + (2S + 3T) = 3S + 5T$. Como S e T são inteiros positivos, a única solução da equação $3S + 5T = 16$ é $S = T = 2$. Assim, conclui-se que o Luís resolveu 2 exercícios na segunda, 2 na terça, 4 na quarta, 6 na quinta e 10 na sexta.

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/∼opm

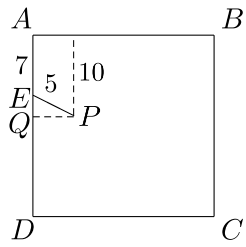
XXI OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

SUGESTÕES para a resolução do problema.

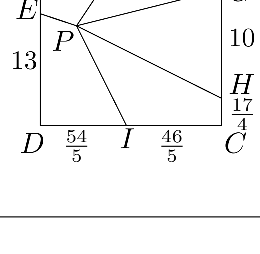
---

2. O quadrado [ABCD] indicado na figura seguinte representa a folha de papel e [EP] o primeiro corte feito pelo Domingos.



Dado que a área da folha de papel mede 400 cm^2, a medida da área de cada pedaço é 80 cm^2. Seja F o ponto em $[AB]$ tal que a área de $[AFPE]$ mede 80 cm^2. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[EPQ]$ tem-se que $\overline{PQ}^2 + (10-7)^2 = 5^2$, logo $\overline{PQ} = 4$ cm. Portanto, a área de $[APE]$ mede 14 cm^2. Então, a área de $[AFP]$ mede $80 - 14 = 66$ cm^2 e, assim, $\dfrac{\overline{AF} \times 10}{2} = 66$, ou seja, $\overline{AF} = \dfrac{66}{5}$ cm. A área de $[FBP]$ mede $\dfrac{(20 - \overline{AF}) \times 10}{2} = 34$ cm^2. Se G for o ponto em $[BC]$ tal que a área de $[FBGP]$ mede 80 cm^2, a medida da área de $[BGP]$ é $80-34 = 46$ cm^2 e, por isso, $\dfrac{\overline{BG} \times (20-4)}{2} = 46$, ou seja, $\overline{BG} = \dfrac{23}{4}$ cm. Assim, a área de $[GCP]$ mede $\dfrac{(20 - \overline{BG}) \times 16}{2} = 114$ cm^2. Se H for o ponto em $[BC]$ tal que a área de $[PGH]$ mede 80 cm^2, tem-se $\dfrac{\overline{GH} \times 16}{2} = 80$, ou seja, $\overline{GH} = 10$ cm. Note-se que $\overline{HC} = 20 - 10 - \dfrac{23}{4} = \dfrac{17}{4}$ cm e a área de $[PHC]$ mede 34 cm^2. Assim, seja I o ponto em $[DC]$ tal que a medida da área de $[PHCI]$ é 80 cm^2, ou seja, a área de $[CIP]$ mede $80 - 34 = 46$ cm^2 e $\dfrac{\overline{IC} \times 10}{2} = 46$, logo, $\overline{IC} = \dfrac{46}{5}$ cm.

Os valores de $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{IC}$ determinam completamente os segmentos $[PF]$, $[PG]$, $[PH]$ e $[PI]$ que representam os cortes efectuados pelo Domingos, como indicado na figura seguinte.



Sociedade Portuguesa de Matemática
`http://www.spm.pt/`

SUGESTÕES para a resolução do problema.

---

3. O número de dígitos do Monstro é

$$9 + 2 \times (99 - 9) + 3 \times (999 - 99) + 4 \times (2002 - 999) = 9 + 180 + 2700 + 4012 = 6901.$$

Logo, o dígito central encontra-se na posição 3451.

Solução 1: Para encontrar esse dígito, uma vez que $9 + 180 + 2700 = 2889$ é menor do que 3451, é necessário percorrer todos os números de 1 a 999 e ainda mais $3451 - 2889 = 562$ dígitos. Visto que a partir de 1000 todos os números até 2002 têm 4 dígitos e $562 = 140 \times 4 + 2$, são necessários 140 números depois de 999 e ainda mais dois dígitos. Ou seja, o dígito central é o segundo dígito que se escreve a seguir a 1139 e é igual a 1 (correspondendo ao algarismo das centenas de 1140).

Solução 2: Para encontrar esse dígito, é necessário percorrer 3450 dígitos da direita para a esquerda, que correspondem a 862 números com 4 dígitos e mais dois dígitos, visto que $3450 = 862 \times 4 + 2$. Ou seja, o dígito central é o algarismo das centenas do número $2002 - 862 = 1140$ e é igual a 1.

XXI OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

SUGESTÕES para a resolução do problema.

4. Seja k o máximo divisor comum dos seis números de 2 algarismos. Como k é o maior possível, os seis números são os menores números de 2 algarismos que têm k como máximo divisor comum, ou seja, k, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$ e $6k$. Assim, k é o maior número inteiro de 2 algarismos que verifica $6k \leq 99$ e, visto que $99 = 6 \times 16 + 3$, tem-se $k = 16$. Portanto, os seis números de 2 algarismos que possuem o maior máximo divisor comum são 16, 32, 48, 64, 80 e 96.