OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/~opm

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. A palavra chave que a Ana Viso escolheu para o seu computador tem os 7 caracteres do seu nome: *A, N, A, V, I, S, O*. Ordenando por ordem alfabética todas as palavras diferentes formadas por todos estes 7 caracteres, a palavra chave da Ana surge na 881 ª posição. Qual é a palavra chave da Ana? Solução

2. Considerem-se cinco esferas com 10 *cm* de raio. Dispõem-se quatro destas esferas sobre uma mesa horizontal de forma que os seus centros formem um quadrado com 20 *cm* de lado e coloca-se sobre elas a quinta esfera de modo que toque as outras quatro. Qual é a distância entre o centro desta quinta esfera e a mesa? Solução

3. O Daniel pintou um quadro rectangular de 2 metros por 4 metros com quatro cores. Sabendo que utilizou mais de duas cores para pintar os quatro cantos do quadro, prova que ele pintou da mesma cor dois pontos que distam no mínimo $\sqrt{5}$ metros. Solução

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

1. Ao ordenar as palavras por ordem alfabética aparecem em primeiro lugar as começadas por A, que são $6! = 720$. De seguida estão as $\frac{6!}{2} = 360$ palavras que começam por I. Atendendo a que $720 < 881 < 720 + 360$ conclui-se que a palavra chave que a Ana escolheu começa por I. Como $881 - 720 = 161$, trata-se da 161ª palavra que começa por esse caracter. Existem $5! = 120$ palavras que começam por IA e $\frac{5!}{2} = 60$ palavras que começam por IN. Atendendo a que $120 < 161 < 120+60$, conclui-se que a palavra chave que a Ana escolheu começa por IN (é a 41ª palavra desse tipo). Existem $4! = 24$ palavras que começam por INA, $\frac{4!}{2} = 12$ palavras que começam por INO e $\frac{4!}{2} = 12$ palavras que começam por INS. Como $24+12 < 41 < 24+12+12$, a palavra chave que a Ana escolheu começa por INS (é a 5ª palavra dessa forma). Como existem $3! = 6$ palavras que começam por $INSA$ a palavra chave é a penúltima desse grupo, ou seja, a palavra $INSAVAO$.

Enunciado da Prova

XX OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
Final Nacional 2002 - 1º dia

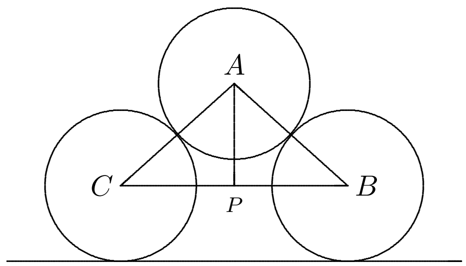
12/4/02

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

2. A figura representa o corte feito nas esferas pelo plano perpendicular à mesa e que contém os centros de duas esferas não tangentes entre si.



O segmento $[CB]$ é a diagonal do quadrado de lado 20 cm formado pelos centros das quatro esferas assentes na mesa, logo $\overline{CB} = 20\sqrt{2}\ cm$. Tem-se também $\overline{AC} = \overline{AB} = 20\ cm$, isto é, o triângulo $[ABC]$ é isósceles. Seja P o pé da perpendicular a $[CB]$ que passa por A. Uma vez que o triângulo é isósceles $\overline{CP} = \overline{PB} = 10\sqrt{2}\ cm$. Pelo teorema de Pitágoras

$$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2,$$

donde $\overline{AP} = 10\sqrt{2}\ cm$. Finalmente, a distância pedida é igual a $10 + 10\sqrt{2} = 10(1+\sqrt{2})\ cm$.

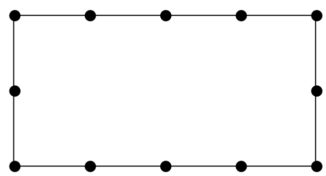
Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

3. A partir de um dos vértices do rectângulo marquem-se sucessivamente 12 pontos de maneira que cada um diste do anterior 1 metro, como está assinalado na figura seguinte.



Se neste conjunto de pontos existirem 4 pontos da mesma cor ou 3 pontos não consecutivos da mesma cor então existem 2 pontos da mesma cor que distam no mínimo $\sqrt{5}$ metros.

Resta analisar o caso em que existem exactamente 3 pontos consecutivos de cada uma das 4 cores. Nestas condições, se existissem 2 vértices da mesma cor, os 4 vértices teriam sido pintados com apenas 2 cores, o que não é possível. Logo os 4 vértices foram pintados com as 4 cores. Portanto, um dos vértices foi pintado com a mesma cor que o centro do rectângulo e dista deste ponto exactamente $\sqrt{5}$ metros.

Enunciado da Prova