XX OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
2ª Eliminatória

16/1/02

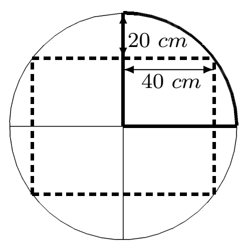
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. Num hotel para gatos e cães 10% dos cães julgam que são gatos e 10% dos gatos julgam que são cães. Após cuidadosas observações conclui-se que 20% de todos os hóspedes pensam que são gatos e que os restantes 80% pensam que são cães. Se no hotel estão hospedados 10 gatos, quantos cães estão hospedados no hotel? Solução

2. A Alice queria uma toalha rectangular, mas só tinha uma redonda (circular). Então dobrou-a em 4 partes iguais e cortou-a da forma indicada a tracejado na figura. Qual a medida da área do tecido desperdiçado? Solução



3. O António e a Catarina começaram a trabalhar no mesmo dia. O horário do António consiste em 3 dias de trabalho e depois um dia de descanso, enquanto que a Catarina trabalha 7 dias seguidos e descansa nos três dias seguintes. Quantos dias de descanso tiveram em comum nos primeiros 1000 dias? Solução

4. Num reino distante quaisquer dois cavaleiros ou são amigos ou inimigos e cada cavaleiro tem exactamente 3 inimigos. Nesse reino vigora a seguinte lei entre os cavaleiros: *Um inimigo do meu amigo é meu inimigo*. Quantas possibilidades há para o número de cavaleiros desse reino? Solução

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

1. Determine-se o número de hóspedes que pensam que são gatos. Como 10% dos cães julgam que são gatos, denotando por C o número de cães do hotel, o número de cães que julgam que são gatos é $\frac{C}{10}$. Além disso, como 10% dos gatos julgam que são cães, 90% dos gatos do hotel pensam que são gatos, isto é, 9 dos gatos pensam que são gatos. Assim o número de hóspedes que pensam que são gatos é $\frac{C}{10} + 9$.

   Por outro lado, sabe-se que este número corresponde a 20% de todos os hóspedes. Logo $\frac{C}{10} + 9 = \frac{20(10+C)}{100}$, donde $C = 70$.

   Portanto no hotel estão hospedados 70 cães.

   Nota: A resolução pode ser efectuada por um raciocínio análogo começando por determinar o número de hóspedes que pensam que são cães.

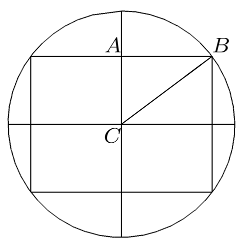
Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

2. Sejam r a medida do raio da circunferência e $[ABC]$ o triângulo rectângulo em A como se indica na figura. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$r^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = (r-20)^2 + 40^2.$$

Resolvendo esta equação conclui-se que $r = 50$ e $\overline{AC} = 30$. Logo a área da toalha rectangular mede $4 \times 40 \times 30 = 4800\ cm^2$ e a área da toalha redonda mede $\pi \times 50^2 = 2500\pi\ cm^2$. Portanto a medida da área do tecido desperdiçado é $2500\pi - 4800 \approx 3054\ cm^2$.



Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

3. O horário do António repete-se de 4 em 4 dias (3 dias de trabalho, T, mais um dia de descanso, D) e o da Catarina de 10 em 10 dias (7 dias T + 3 dias D). Como $m.m.c.(4, 10) = 20$ basta ver quantos dias de descanso têm em comum em 20 dias.

António	TTTDTTTDTTTDTTTDTTTD
Catarina	TTTTTTTDDDTTTTTTTDDD

Pela tabela verifica-se que em cada 20 dias há dois dias de descanso em comum. Assim nos primeiros 1000 ($= 50 \times 20$) dias tiveram $50 \times 2 = 100$ dias de descanso em comum.

Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

4. Seja N um número natural para o qual é possível que o reino tenha exactamente N cavaleiros (nas condições do enunciado). Note-se que, em princípio, N pode assumir mais que um valor. É claro que uma possibilidade é $N = 4$ (caso em que cada um dos 4 cavaleiros é inimigo dos restantes 3 e não é amigo de nenhum). Porém, não pode ser $N = 5$, pois se fosse este o número de cavaleiros do reino então pelo menos um deles seria inimigo dos 4 restantes, o que viola a lei em vigor. (De facto, designem A um dos 5 cavaleiros, I_1, I_2 e I_3 os 3 cavaleiros seus inimigos, e B o cavaleiro restante. É claro que A e B são amigos, pois A não pode ter mais que 3 inimigos, logo pela lei em vigor I_1, I_2 e I_3 também são inimigos de B. Por outro lado, I_1, por exemplo, é inimigo de A e de B, logo ou I_2 é seu amigo e I_3 seu inimigo, ou o contrário. Suponha-se, sem perda de generalidade, que I_2 é o amigo de I_1 e I_3 o inimigo. Então, I_3 seria também inimigo de I_2, logo seria inimigo dos restantes quatro cavaleiros!) Agora, $N = 6$ também é uma possibilidade, já que 6 cavaleiros podem ser agrupados em dois grupos de 3 elementos cada, de modo a que em cada grupo os 3 cavaleiros sejam amigos comuns e cada um deles inimigo dos 3 cavaleiros do outro grupo. Vejamos, finalmente, que não pode ser $N \geq 7$. Com efeito, admita-se que $N \geq 7$. Sendo A um dos cavaleiros do reino, ele terá 3 inimigos, digamos, I_1, I_2 e I_3, e todos os restantes $N - 4$ cavaleiros terão que ser seus amigos. Pela lei em vigor, estes $N - 4$ cavaleiros, por serem amigos de A, terão também que ser inimigos de I_1, I_2 e I_3, logo cada um destes três tem pelo menos $1 + (N - 4) = N - 3$ inimigos, o que não pode suceder porque $N - 3 \geq 4$.

   Conclui-se que as únicas possibilidades para N são $N = 4$ e $N = 6$, pelo que há duas possibilidades para o número de cavaleiros.

Enunciado da Prova
