Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Em cada conjunto de números consecutivos em que o primeiro termina em 0 e o último termina em 9 há exatamente metade dos números cuja soma dos algarismos é par. Assim, entre 10 e 2019 há 1005 números nestas condições. A estes há que juntar os números: $2, 4, 6, 8, 2020$ e 2022. A resposta correta é $1005 + 6 = 1011$.

   Opção correta: C)

   (b) O ponteiro dos minutos está exatamente em cima do número 3, ou seja, no mesmo sítio onde o ponteiro das horas estava $\frac{1}{4}$ de hora antes de parar. Portanto basta calcular qual o ângulo que o ponteiro das horas se deslocou nesse tempo. Em doze horas ele desloca-se $360°$. Usando uma regra de três simples deduzimos que ele se deslocou, em graus, $\frac{360}{12} \times \frac{1}{4} = 7 + \frac{1}{2}$, que é igual a $7°30'$.

   Opção correta: E)

   (c) Os números apenas diferem no algarismo das unidades. Por isso, basta calcular a diferença da soma dos algarismos unidades de cada uma das ruas. Cada rua tem 90 casas e na rua com maior soma o algarismo das unidades de todas as casas é o 9, enquanto na rua com menor soma o algarismo das unidades de todas as casas é o 0. Podemos então concluir que a diferença pretendida é $9 \times 90 = 810$.

   Opção correta D).

   (d) Seja $n = abba$ o código do cofre onde a e b são dois algarismos. Se $a \geq 5$, então o dobro é um número de cinco algarismos que começa por 1 e portanto tem de acabar em 1, o que é impossível porque $2n$ é um número par. Portanto, a é um algarismo entre 1 e 4. Se b for um algarismo menor do que 5, é fácil verificar que $2n$ também é uma capicua com os algarismos $2a$ e $2b$. Se b for maior do que 4, então o algarismo das unidades de $2n$ é $2a$, mas o algarismo dos milhares é $2a + 1$, uma vez que $2b \geq 10$. Podemos então concluir que há quatro escolhas possíveis para a e cinco escolhas possíveis para b, ou seja, há $4 \times 5 = 20$ códigos possíveis.

   Opção correta B).

5. Como $[ABCDE]$ é um pentágono regular, cada ângulo externo mede $360/5 = 72°$, pelo que cada ângulo interno mede $180 - 72 = 108°$.

   Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles e, portanto, $P\widehat{A}B = B\widehat{C}P = \frac{1}{2}(180 - 108) = 36°$. De forma análoga, concluímos que $D\widehat{B}C = 36°$, pelo que $A\widehat{B}P = 108 - 36 = 72°$.

   Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de $[ABP]$ é $180°$, segue-se que $A\widehat{P}B = 180 - 36 - 72 = 72°$.

6. Comecemos por notar que é possível eles moverem as 20 caixas em 33 minutos, acabando às 9h33. Para isso, o João move 6 caixas grandes e 1 pequena, demorando exatamente $6 \times 5 + 1 \times 3 = 33$ minutos, e a Ana move 4 caixas grandes e 9 caixas pequenas, demorando $4 \times 6 + 9 \times 1 = 33$ minutos.

   Resta ver que não é possível acabarem o trabalho antes das 9h33. Comecemos por notar que, apesar do João ser mais rápido a mover as caixas grandes, não é o mais eficiente ele mover as caixas grandes todas pois demoraria 50 minutos, que é mais do que 33 minutos. Logo a Ana tem de levar caixas grandes.

Se o João se encarregar de mover 2 (ou mais) caixas pequenas, como a Ana move pelo menos uma caixa grande, é eficiente o João trocar duas caixas pequenas por uma grande da Ana, pois em vez de demorarem 6 minutos cada um a mover as três caixas, a Ana demoraria somente 2 minutos e o João somente 5. Logo, o João move no máximo uma caixa pequena.

Se o João mover 0 caixas pequenas, antes das $9\text{h}33$ consegue mover no máximo 6 caixas grandes, ficando o resto a cargo da Ana. Mas para a Ana mover 4 caixas grandes e 10 pequenas, demoraria 34 minutos, fazendo com que acabassem o trabalho às $9\text{h}34$.

Se o João mover 1 caixa pequena, antes das $9\text{h}33$ consegue mover no máximo 5 caixas grandes e 1 caixa pequena, ficando o resto a cargo da Ana. Mas para a Ana mover 5 caixas grandes e 9 pequenas, demoraria 41 minutos, fazendo com que acabassem o trabalho às $9\text{h}41$.

Logo a menor hora a que conseguem terminar o trabalho é às $9\text{h}33$.