Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

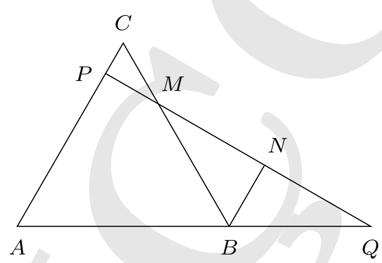
4. Como $\overline{BN} > \overline{PC}$, então P pertence à semi-reta $\dot{A}C$.

   O triângulo $[CPM]$ é retângulo e $P\widehat{C}M = 60°$, logo $C\widehat{M}P = 30°$ e $\overline{CM} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30°} = 2 \times \overline{PC} = 14$.

   Por outro lado, também o triângulo $[QPA]$ é retângulo e $P\widehat{A}Q = 60°$, logo $B\widehat{Q}M = 30°$. Assim conclui-se que o triângulo $[BQM]$ é isósceles e N, sendo o ponto médio de $[MQ]$, é o pé da altura relativamente ao vértice B e $B\widehat{N}M = 90°$. Sendo assim, $[BNM]$ e $[CPM]$ são semelhantes com razão de semelhança 2, pelo que

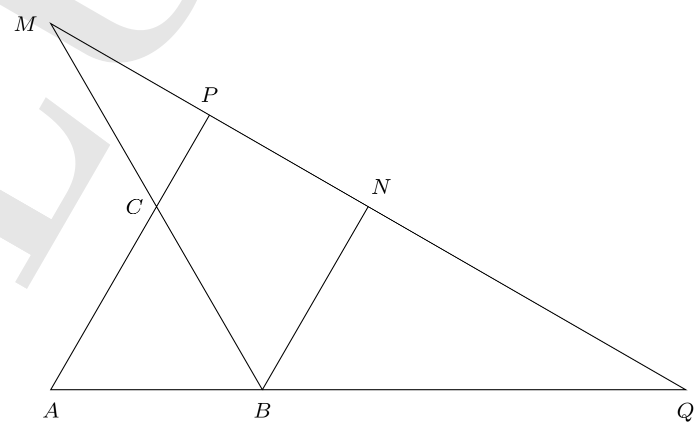
$$\overline{MB} = 2 \times \overline{MC}.$$

   <u>Caso 1</u>: P pertence a $[AC]$.



   Neste caso, M pertence a $[CB]$ e $\overline{CB} = 3 \times \overline{CM} = 3 \times 14 = 42$.

   <u>Caso 2</u>: P não pertence a $[AC]$.



   Neste caso, M não pertence a $[CB]$ e $\overline{CB} = \overline{BM} - \overline{CM} = \overline{CM} = 14$.

5. A média das $n-1$ casas existentes na aldeia está entre os números

$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}=\frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{2+\cdots+(n-1)+n}{n-1}=\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}\ .$$

Ou seja,

$$\frac{n}{2}\leq\frac{202}{3}\leq\frac{n+2}{2}\Leftrightarrow\frac{404}{3}\geq n\geq\frac{398}{3}$$

Só existem dois inteiros nestas condições, 133 e 134. Mas $n-1$ tem que ser divisível por 3 porque $\frac{202}{3}\times(n-1)$ é um número inteiro, e portanto $n-1=132$, e $n=133$.

Seja k o número da casa que foi demolida. Sabemos que $\dfrac{1+2+\cdots+133-k}{132}=\dfrac{202}{3}$. Desenvolvendo esta igualdade, obtém-se que

$$\frac{133\times134}{2}=\frac{202}{3}\times132+k\Leftrightarrow k=23\ .$$

A aldeia tinha 133 casas e casa que foi demolida tinha o número 23.

6. Seja L_0 a primeira linha do tabuleiro. Consideremos um conjunto $S=S_1\cup\ldots\cup S_n$, onde os S_i são pares disjuntos de colunas. Por hipótese, existe uma linha L_i que difere de L_{i-1} nas colunas de S_i. Então L_n difere de L_0 nas colunas de S.

Como há 2^{2023} conjuntos de colunas e metade destes conjuntos têm um número par de colunas, então o tabuleiro tem, no mínimo, 2^{2022} linhas.

Pode-se ver que existe um tabuleiro magnífico com 2023 colunas e 2^{2022} linhas: basta considerar as linhas formadas por 2023 algarismos binários, dos quais um número par deles é 1.