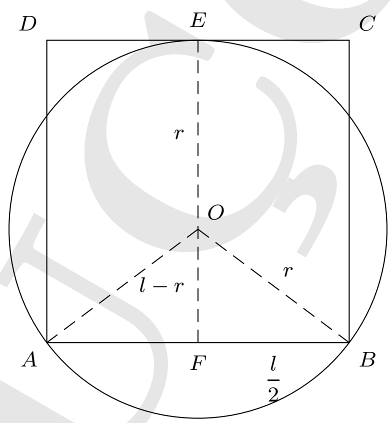
Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja $n = abba$ o código do cofre onde a e b são dois algarismos. Se $a \geq 5$, então o dobro é um número de cinco algarismos que começa por 1 e portanto tem de acabar em 1, o que é impossível porque $2n$ é um número par. Portanto, a é um algarismo entre 1 e 4. Se b for um algarismo menor do que 5, é fácil verificar que $2n$ também é uma capicua com os algarismos $2a$ e $2b$. Se b for maior do que 4, então o algarismo das unidades de $2n$ é $2a$, mas o algarismo dos milhares é $2a + 1$, uma vez que $2b \geq 10$. Podemos então concluir que há quatro escolhas possíveis para a e cinco escolhas possíveis para b, ou seja, há $4 \times 5 = 20$ códigos possíveis.

5. Seja l o comprimento do lado do quadrado $[ABCD]$, r o raio da circunferência e O o seu centro. A circunferência é tangente ao lado $[DC]$ no ponto E e passa pelos vértices A e B. Considere-se ainda o ponto F, interserção da reta OE com $[AB]$.



Os segmentos $[OB]$ e $[OA]$ são raios da circunferência. Além disso, $[OE]$ é perpendicular a $[DC]$, logo $[OF]$ é perpendicular a $[AB]$. Por isso $[OF]$ é altura do triângulo isósceles $[ABO]$ e $\overline{FB} = \frac{l}{2}$.

Observe-se ainda que $\overline{OF} = \overline{EF} - \overline{OE} = l - r$.

Portanto, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[FBO]$ garante que

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (l - r)^2 = r^2,$$

ou seja,

$$\frac{5}{4}l - 2r = 0,$$

donde se conclui que $\frac{l}{r} = \frac{8}{5}$.

6. Primeiro notemos que uma jogadora não consegue jogar quando, na sua vez, a caixa preta estiver vazia e a caixa branca tiver apenas um berlinde. Além disso, é claro que o jogo termina pois, em cada jogada, uma das caixas fica com menos berlindes e a caixa preta nunca aumenta o número de berlindes.

   Ora, para que dois berlindes da caixa preta saiam do jogo são necessárias uma ou três jogadas (ou uma das jogadoras tira os dois berlindes da caixa preta, ou estes são primeiro passados para a caixa branca e depois são tirados do jogo) e para que dois berlindes da caixa branca saiam do jogo é necessária uma jogada (a única forma de o fazer é tirando os dois berlindes numa das jogadas).

   Logo, o jogo termina após um número ímpar de jogadas, pelo que, independentemente de como jogarem, a Adriana sai vencedora.