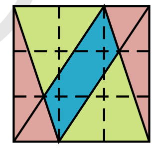
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Na figura ao lado, se cada quadrícula tiver área 1, o quadrado tem área $3 \times 3 = 9$, os triângulos verdes têm área $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ e os triângulos rosa têm área $\dfrac{3 \times 1}{2} = \dfrac{3}{2}$.



Logo a área do paralelogramo é $9 - 2 \times 2 - 2 \times \dfrac{3}{2} = 2$.

Portanto, a razão entre a área do paralelogramo e a área do quadrado é $\dfrac{2}{9}$.

Opção correta: B).

(b) Se o preço de cada caixa for 3€, então o supermercado vende 600 caixas. Logo a receita é $3 \times 600 = 1800$€.

Se o preço de cada caixa for $2,70 = 3 - 10 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 + 10 \times 4 = 640$ caixas. Logo a receita é $2,70 \times 640 = 1728$€.

Se o preço de cada caixa for $3,30 = 3 + 10 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 10 \times 4 = 560$ caixas. Logo a receita é $3,30 \times 560 = 1848$€.

Se o preço de cada caixa for $3,75 = 3 + 25 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 25 \times 4 = 500$ caixas. Logo a receita é $3,75 \times 500 = 1875$€.

Se o preço de cada caixa for $3,90 = 3 + 30 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 30 \times 4 = 480$ caixas. Logo a receita é $3,90 \times 480 = 1872$€.

Opção correta: D).

(c) Se o quociente fosse $\dfrac{3}{4}$, então o número de embalagens verdes seria $\dfrac{3}{7}$ do total, que não é um número inteiro.

Os quocientes $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{3}{7}$ são possíveis, respetivamente se houver 12, 6, 5 e 9 embalagens verdes.

Opção correta: D).

(d) Como $2022 = 2 \times 3 \times 337$, $2023 = 3 \times 17 \times 17$, $2024 = 2 \times 2 \times 506$ e $2025 = 5 \times 5 \times 81$, então é possível arrumar todas as paletes em paralelepípedo com lados maiores que 1.

Opção correta: E).

2. O produto dos números $1, 2, 2^2, 5, 2 \times 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \times 5$ e 3×7 é

$$2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2.$$

Assim, o produto dos números de cada conjunto é $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Consideremos o conjunto S que não tem o 1. Para ter o fator 5, este conjunto tem o 5 ou o 10, e para ter o fator 7, tem o 7 ou o 21.

- Se S tem o 5 e o 7, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 9 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 2 e o 8, logo $S = \{2, 5, 7, 8, 9\}$;
- Se S tem o 5 e o 21, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 6 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 8, ou então o 2 e o 4, logo $S = \{5, 6, 8, 21\}$ ou $S = \{2, 4, 5, 6, 21\}$;
- Se S tem o 10 e o 7, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 9 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 8, ou então o 2 e o 4, logo $S = \{7, 8, 9, 10\}$ ou $S = \{2, 4, 7, 9, 10\}$;
- Se S tem o 10 e o 21, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 6 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 4, logo $S = \{4, 6, 10, 21\}$;

Portanto, é possível separar os números de 6 formas diferentes.

3. A Ana ou o Bruno jogaram em todas partidas, porque só há 3 amigos no total, e jogaram juntos o número de vezes que a Carolina descansou. Logo houve $12 + 21 - 8 = 25$ partidas no total.

   Para a Ana só ter jogado 12 partidas, teve de ter começado a descansar e ganhar sempre que jogou, logo ganhou todas as partidas de ordem par, incluindo a 24^{a} partida, ficando a descansar na última.