# OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

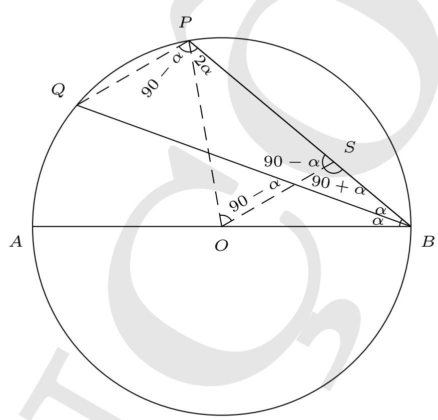
XLI OPM - Final - 1º Dia - 31.03.2023 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

1. A Ana ou o Bruno jogaram em todas as partidas, porque só há $3$ amigos no total, e jogaram juntos o número de vezes que a Carolina descansou. Logo houve $12 + 21 - 8 = 25$ partidas no total. Para a Ana só ter jogado $12$, teve de ter começado a descansar e ganhar sempre que jogou, logo ganhou todas as partidas de ordem par, incluindo a $24^{\underline{a}}$ partida, ficando a descansar na última.

2. Como o ponto $Q$ é o ponto médio do arco $AP$, $BQ$ é a bissetriz de $ABP$, ou seja, $A\widehat{B}Q = Q\widehat{B}P = \frac{A\widehat{B}P}{2} = \alpha$.




O triângulo $[BPO]$ é isósceles com $\overline{OB} = \overline{OP}$, logo $O\widehat{P}B = O\widehat{B}P = 2\alpha$.

Por outro lado, o ângulo $BPQ$ é um ângulo inscrito que compreende o arco $QAB$ que mede $180° + 2\alpha$, logo $Q\widehat{P}B = \frac{180°+2\alpha}{2} = 90° + \alpha$. Logo, $Q\widehat{P}O = 90° + \alpha - 2\alpha = 90° - \alpha$.

Uma vez que a reta $OS$ é paralela à reta $QP$, conclui-se que $P\widehat{O}S = O\widehat{P}Q = 90 - \alpha$ e $O\widehat{S}B = Q\widehat{P}B = 90° + \alpha$ e, por isso, $O\widehat{S}P = 90° - \alpha$.

Logo, o triângulo $[SPO]$ é isósceles. Portanto, $\overline{PS} = \overline{PO} = 1$.

3. Comecemos por contar os casos em que há $16$ cubos de volume $1$.

   Designemos cada um dos cubos da camada superior por $1, 2, \ldots, 8$, e cada um dos cubos da camada inferior pelo mesmo número do cubo que está por cima. Cada forma de colocar os cubos do caixote é equivalente a uma permutação dos $16$ números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8$. Há $16!$ formas de permutar $16$ números, mas como há $8$ pares de números iguais, cada um destes pares origina $2$ permutações iguais. Obtemos assim,

$$\frac{16!}{2^8}$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.

   Vamos contar agora os casos em que há um cubo de volume $8$ e $8$ cubos de volume $1$. O cubo maior tem $3$ posições possíveis. Para cada uma delas, temos, de forma análoga ao caso anterior, que permutar os números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5$, onde $5$ corresponde ao cubo maior. Neste caso obtemos

$$3 \times \frac{9!}{2^4}$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.

   Finalmente, quando há dois cubos de volume $8$, só há duas formas distintas de os colocar.

   Portanto, ao todo há

$$\frac{16!}{2^8} + 3 \times \frac{9!}{2^4} + 2$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.