XLI OPM - Final - 1º Dia - 31.03.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

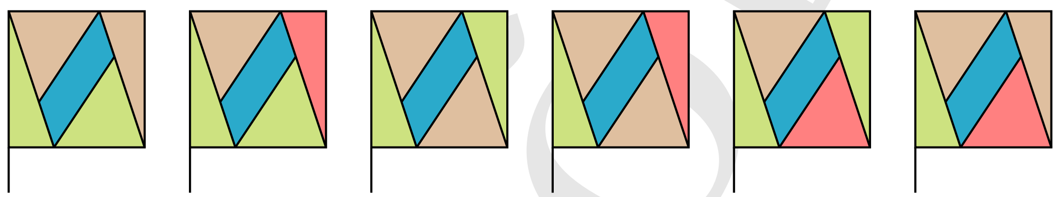
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Uma vez que m.m.c$(3,6,8) = 24$, ele volta a jogar com todos no mesmo dia daqui a 24 dias. Até lá jogou 8 vezes com o Tiago, logo 8 partidas, 4 vezes com o Pedro, logo $4 \times 2 = 8$ partidas e 3 vezes com a Mariana, logo $3 \times 3 = 9$ partidas. No total, ele jogou $8 + 8 + 9 = 25$ partidas.

   Opção correta: C).

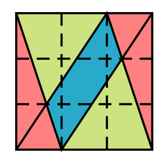
   (b) Há seis hipóteses diferentes de distribuir as cores:



   Como podemos permutar as 4 cores de 24 formas diferentes, há $6 \times 24 = 144$ bandeiras diferentes.

   Opção correta: E).

   (c) Na figura ao lado, se cada quadrícula tiver área 1, o quadrado tem área $3 \times 3 = 9$, os triângulos verdes têm área $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ e os triângulos rosa têm área $\dfrac{3 \times 1}{2} = \dfrac{3}{2}$.



   Logo a área do paralelogramo é $9 - 2 \times 2 - 2 \times \dfrac{3}{2} = 2$.

   Portanto, a razão entre a área do paralelogramo e a área do quadrado é $\dfrac{2}{9}$.

   Opção correta: B).

   (d) Uma vez que $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ escrevem-se 45 algarismos, dos quais 9 algarismos são iguais a 9. Uma vez que $10 + 11 + \cdots + 19 = \frac{10+19}{2} \times 10 = 145$, escrevem-se $145 \times 2 = 290$ algarismos, dos quais 19 são iguais a 9. Uma vez que $20 + 21 + \cdots + 29 = \frac{20+29}{2} \times 10 = 245$, escrevem-se $245 \times 2 = 490$ algarismos, dos quais 29 são iguais a 9. Uma vez que $30 + 31 + \cdots + 39 = \frac{30+39}{2} \times 10 = 345$, escrevem-se $345 \times 2 = 790$ algarismos dos quais 39 são iguais a 9. Até aqui já se escreveram $45 + 290 + 490 + 790 = 1615$ algarismos. Uma vez que $40 + 41 + \cdots + 45 = \frac{40+45}{2} \times 6 = 85 \times 3 = 255$, e $1615 + 510 > 2023$, já não se escreveram mais algarismos 9. No total, o Tomás escreveu $9 + 19 + 29 + 39 = 96$ algarismos 9.

   Opção correta: D).

2. Comecemos por notar que o triângulo A tem $\frac{1\times 2}{2} = 1$ dm^2 de área. Por outro lado, como os lados de um quadrado são paralelos dois a dois, os triângulos A e B são semelhantes. Além disso, uma vez que, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa do triângulo A mede $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ dm e, por se tratar de um dos lados do quadrado, a hipotenusa do triângulo B mede 2 dm, a razão de semelhança entre os dois é $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Logo, a área do triângulo B mede $1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$ dm^2, e portanto, a região C mede $2^2 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$ dm^2.

3. Como o número formado pelas idades atuais da Ana e da Beatriz tem quatro algarismos, temos duas possibilidades: cada uma das idades é um número entre 10 e 99 ou a Ana tem menos de 10 anos e a Beatriz pelo menos 100 anos. No entanto, se somarmos 31 a cada um uma das idades, voltamos a obter um número de quatro algarismos, pelo a segunda hipótese não se verifica e concluímos que cada uma das idades é um número entre 10 e 69.

   Seja N o número formado pelas idades atuais da Ana e da Beatriz. Como N é um quadrado perfeito, existe um número inteiro n tal que $N = n^2$. Uma vez que cada uma das idades é um número entre 10 e 69, o número obtido somando 31 a cada uma das idades e juntando os resultados equivale a somar N com 3131. Mais uma vez, existe um número inteiro m tal que $N + 3131 = m^2$. Subtraindo as duas equações obtidas, vem $3131 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Como a decomposição em primos de 3131 é $3131 = 31 \cdot 101$, concluimos que $101 = m + n$ e que $31 = m - n$. Resolvendo este sistema de duas equações, obtemos a sua única solução: $n = 35$ e $m = 66$. Concluimos que $N = (35)^2 = 1225$ e, portanto, a Ana tem 12 anos e a Beatriz tem 25 anos.