



OLIMPÍADAS NACIONAIS DE MATEMÁTICA

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos. Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

[Soluções](#)

4. Alguma vez achaste esquisito que números “quase iguais” possam parecer muito diferentes? Por exemplo, no sistema decimal 29 e 30 só diferem de uma unidade mas não contêm nenhum algarismo comum. O sistema de numeração ALPHABETA usa somente os algarismos 0 e 1 e evita esta situação:

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ALPHABETA	0	1	11	10	110	111	101	100	1100

Nele, a regra para construir o sucessor de um número é a seguinte: sem repetir um número anterior da lista, altera-se o algarismo o mais à direita possível, senão coloca-se um 1 à esquerda.

- (a) Que número do sistema decimal é representado no código ALPHABETA pelo número 111111?  
(b) Qual é o número seguinte neste código?  
(c) Descreve um algoritmo para encontrar, dado um qualquer número no código ALPHABETA, o número seguinte neste código.

[Solução](#)

5. Considera um triângulo rectângulo cujos catetos medem 1 cm de comprimento. Supõe que a cada ponto do triângulo foi atribuída uma cor do conjunto das cores Castanha, Azul, Verde e Laranja. Prova que, qualquer que seja a maneira como isso tenha sido feito, há pelo menos um par de pontos da mesma cor a uma distância igual ou superior a  $2 - \sqrt{2}$  cm um do outro.

[Solução](#)

6. Num polígono regular de 134 lados traçam-se 67 diagonais de forma a que de cada vértice saia exactamente uma diagonal. Chamamos *longitude* de uma diagonal ao número de lados do polígono compreendidos entre os vértices da diagonal e que seja menor ou igual a 67. Se ordenarmos as longitudes das diagonais por ordem crescente, obtemos uma sucessão de 67 números  $(d_1, d_2, \dots, d_{67})$ . Será possível traçar diagonais tais que

(a)  $(d_1, \dots, d_{67}) = (\underbrace{2, \dots, 2}_6, \underbrace{3, \dots, 3}_{61})$  ?

(b)  $(d_1, \dots, d_{67}) = (\underbrace{3, \dots, 3}_8, \underbrace{6, \dots, 6}_{55}, \underbrace{8, \dots, 8}_4)$  ?

[Solução](#)