

OLIMPIADAS NACIONAIS DE MATEMÁTICA

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.

Duração: 2 horas

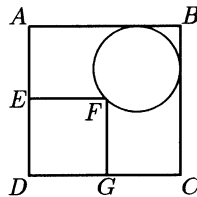
Cada questão vale 10 pontos

[Soluções](#)

1. Mostra que se  $n$  é um natural ímpar então  $n^2 - 1$  é divisível por 8.

[Solução](#)

2. Na figura seguinte



$[ABCD]$  é um quadrado de lado 1,  $[DEFG]$  um quadrado de lado  $x$  e nela desenhámos a circunferência que passa por  $F$  e é tangente aos lados  $AB$  e  $BC$  do quadrado grande. Determina, em função de  $x$ , o raio desta circunferência.

[Solução](#)

3. Considera no conjunto  $\mathbb{N}_0$  uma operação  $*$  com as seguintes propriedades:

- (a)  $1 * 1 = 2$ ;
- (b)  $(a + b) * c = (*1) \times (b * c)$ ;
- (c)  $a * (b - a) = (0 * b) - (0 * a)$  se  $b \geq a$ .

Determina  $1995 * 1995$ .

[Solução](#)

4. No dia 31 de Dezembro de 1994 deu-se um golpe de estado na Poldávia o que levou oito políticos a refugiarem-se numa ilha deserta e a decidirem criar um parlamento no exílio com as seguintes regras de funcionamento:

- (a) O parlamento reúne-se todos os dias (tendo começado logo no próprio dia 31);
- (b) Em cada dia deverá estar presente pelo menos um deputado;
- (c) Em nenhum par de dias deve o mesmo conjunto de deputados estar presente;
- (d) No  $n$ -ésimo dia de funcionamento do parlamento, o conjunto de deputados presentes deve incluir, para cada  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , pelo menos um deputado que estava presente no  $k$ -ésimo dia;

Até que dia do ano poderá o parlamento funcionar sem quebrar nenhuma regra?

[Solução](#)