SUGESTÕES para a resolução dos problemas

4. Em cada Final, seja X_n o conjunto dos participantes que resolveram o problema n. As hipóteses do problema são:

$$(i)\ \bigcap X_n = \emptyset$$
$$(ii)\ X_n \neq \emptyset,\ \forall n.$$

Pretende-se provar que

$$\exists n_1, n_2 : X_{n_1} \setminus X_{n_2} \neq \emptyset \text{ e } X_{n_2} \setminus X_{n_1} \neq \emptyset.$$

Se assim não for, então dados quaisquer dois destes conjuntos, um deles estará contido no outro. Os conjuntos estarão portanto "encaixados" e a intersecção de todos eles será o mais pequeno. Ora isto põe *(i)* e *(ii)* em contradição.

5. Comecemos por pensar num problema de certo modo "dual" daquele que se pretende resolver:

Suponhamos que temos um ponto P fixo na circunferência C e que pretendemos determinar a posição de um ponto Q, que varia numa outra circunferência de centro O, contida no interior de C, de modo que o ângulo $\widehat{OPQ}$ seja máximo.

Neste caso, é claro que o ângulo $\widehat{OPQ}$ é máximo quando PQ é tangente à circunferência mais pequena, isto é, quando o ângulo $\widehat{OQP}$ mede 90°.

Consideremos então o problema dado no enunciado.

Estando agora Q fixo no interior de C, o ponto P da circunferência C tal que o ângulo $\widehat{OPQ}$ é máximo deve ser posicionado de modo a que o ângulo $\widehat{OQP}$ seja recto. De facto, se escolhessemos outro ponto – digamos P' – na circunferência C, já sabemos que o maior ângulo $\widehat{OP'Q'}$ possível, para Q' a variar na circunferência de centro O e raio OQ, se obtém quando $\widehat{OQ'P'}$ é de 90°; consequentemente, o ângulo $\widehat{OP'Q}$ é inferior ao ângulo $\widehat{OP'Q'}$ máximo. Como, para P, P' e Q' escolhidos acima, os triângulos $[OPQ]$ e $[OP'Q']$ são geometricamente iguais, então $\widehat{OPQ} = \widehat{OP'Q'}$ e, portanto, o ângulo $\widehat{OP'Q}$ é inferior ao ângulo $\widehat{OPQ}$.

6. A resposta é nove. De facto, depois do Rei Artur dar c_n $(n = 1, 2)$ golpes que cortam n cabeças e k_m $(m = 1, 2)$ golpes que cortam m caudas, os números de cabeças e caudas do dragão serão iguais a, respectivamente, $3 - 2c_2 + k_2$ e $3 + k_1 - 2k_2$. Portanto teremos que determinar a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 2c_2 - k_2 &= 3 \\ 2k_2 - k_1 &= 3 \end{cases}$$

que minimize a soma $c_2 + k_1 + k_2$ (claro que o Rei Artur deve escolher $c_1 = 0$). Da primeira equação segue que k_2 é ímpar; da segunda equação vem então $k_2 \geq \frac{3}{2}$ logo $k_2 \geq 3$. Consequentemente $c_2 = \frac{3+k_2}{2} \geq 3$ e $k_1 = 2k_2 - 3 \geq 3$ logo o número total de golpes é maior ou igual a 9. Os números $c_2 = k_1 = k_2 = 3$ satisfazem o nosso sistema de equações, mas teremos que assegurar que é realmente possível infligir 3 golpes de cada tipo (para que, por exemplo, o Rei Artur não tenha que cortar duas caudas quando só resta uma cauda). Uma possível sequência de golpes é a seguinte:

1. cortar uma cauda;
2. cortar duas caudas;
3. cortar duas cabeças;
4. repetir a sequência 1, 2, 3 mais duas vezes.