XII ONM - Categoria B (10^o, 11^o e 12^o anos)
1^a Eliminatória

17/11/93

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

1. Associando a primeira e a última parcelas, a segunda e a penúltima parcelas e assim sucessivamente, obtemos:

$$\left(\frac{1}{1993^{-1993}+1}+\frac{1}{1993^{1993}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1993^{-1}+1}+\frac{1}{1993^{1}+1}\right)+\frac{1}{1993^{0}+1}=$$

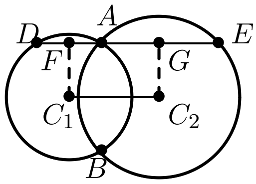
$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{1993^{1993}}+1}+\frac{1}{1993^{1993}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{1}{1993^{1}}+1}+\frac{1}{1993^{1}+1}\right)+\frac{1}{1993^{0}+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1+1993^{1993}}{1993^{1993}}}+\frac{1}{1993^{1993}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{1+1993^{1}}{1993^{1}}}+\frac{1}{1993^{1}+1}\right)+\frac{1}{1993^{0}+1}=$$

$$=\left(\frac{1993^{1993}}{1+1993^{1993}}+\frac{1}{1993^{1993}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1993^{1}}{1+1993^{1}}+\frac{1}{1993^{1}+1}\right)+\frac{1}{1993^{0}+1}=$$

$$=\underbrace{1+\cdots+1}_{1993\text{ vezes}}+\frac{1}{2}=1993,5\,.$$

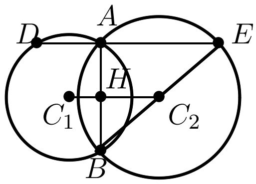
2. Sugestão 1: A partir de C_1 e C_2 traçam-se perpendiculares a $[C_1C_2]$, que intersectam $[DE]$ nos pontos F e G, respectivamente



É evidente que $\overline{FG}=\overline{C_1C_2}$. Por outro lado, $\overline{AG}=\overline{GE}$, pois um raio corta uma corda que lhe é perpendicular em duas partes iguais. Do mesmo modo $\overline{DF}=\overline{FA}$. Finalmente

$$\overline{DE}=\overline{DF}+\overline{FA}+\overline{AG}+\overline{GE}=2\,\overline{FA}+2\,\overline{AG}=2\,\overline{FG}=2\,\overline{C_1C_2}\,.$$

Sugestão 2: É evidente que $[AB]$ $[C_1C_2]$ são perpendiculares (basta usar a regra de construção da mediatriz de $[AB]$, por exemplo), pelo que B e E são pontos diametralmente opostos:



Se designarmos por H o ponto médio de $[AB]$ é evidente que os triângulos $[BHC_2]$ e $[BAE]$ são semelhantes, logo os seus lados são proporcionais. Como $\overline{DB}=2\,\overline{BC_2}$ segue-se que $\overline{AH}=2\,\overline{HC_2}$. De modo análogo se conclui que $\overline{DA}=2\,\overline{HC_1}$, o que resolve o problema.

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

3. O cerne da questão está no facto dos carros lentos circularem mais perto uns dos outros que os rapidos.

   A Paula conduz durante 1 hora e evidentemente ultrapassa somente os carros lentos e é ultrapassada somente pelos carros rápidos. O espaço que separa dois carros lentos é igual a $\frac{1}{6}$ quilómetros, logo por cada quilómetro há 6 carros lentos. Relativamente a estes carros a Paula circula a 30Km/h portanto o número de carros que ultrapassa é igual a $30 \times 6 = 180$ carros. Isto é, o Ricardo pagará 18000 escudos. O espaço que separa dois carros rápidos é igual a $\frac{1}{3}$ quilómetros, logo por cada quilómetro há 3 carros rápidos. Relativamente a estes carros a Paula conduz a -30Km/h. Portanto, o número de carros que a ultrapassam é igual a $30 \times 3 = 90$ carros. Isto é, a Paula pagará 9000 escudos.

   Portanto a Paula terá um lucro de 18000 - 9000 = 9000 escudos.

4. Comecemos por dividir as pessoas em grupos, segundo a sua nacionalidade. É óbvio que há, pelo menos, um grupo com um mínimo de 41 pessoas, pois não é possível terem todos no máximo 40 ($40 \times 5 = 200$). Nesse grupo, pelo menos 21 têm o mesmo sexo (justificação análoga). Temos entao um grupo de pelo menos 21 pessoas do mesmo país e sexo.

   Dividimos agora as pessoas deste grupo segundo as suas idades. Formamos assim um máximo de 5 grupos já que se tivessemos 6 grupos, haveria 6 pessoas com idades diferentes, o que não é possível. É agora claro que pelo menos um destes grupos tem, no mínimo, 5 pessoas pois não é possível terem todos no máximo 4 ($4 \times 5 = 20$).