XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

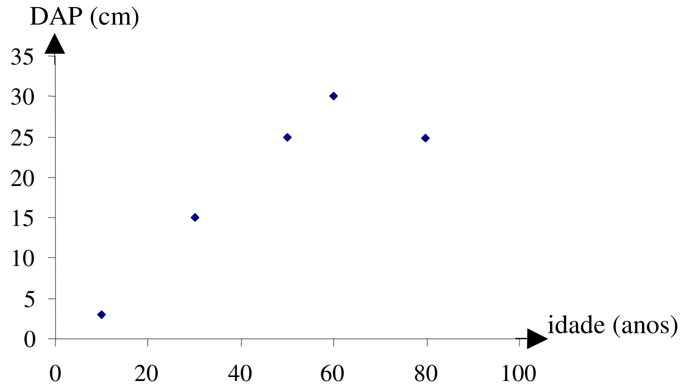
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em uma floresta, é de se esperar que árvores com troncos mais grossos sejam mais velhas. Com o intuito de verificar a relação entre o tamanho da árvore e a sua idade, foram medidas as idades, em anos, e o DAP (diâmetro à altura do peito) de 5 carvalhos no norte dos EUA, sendo obtidos os seguintes resultados aproximados:

Idade (anos)	10	30	50	60	80
DAP (cm)	3	15	25	30	25

O gráfico do DAP em função da idade é



Nesse problema, sendo x a idade, determinaremos a reta de equação $y = ax + b$ que melhor se aproxima desses dados, no sentido que a soma dos quadrados dos erros (diferença entre o DAP e o y correspondente) é mínima. Os procedimentos descritos nos itens (a) e (b) são um exemplo do *Método dos Mínimos Quadrados*, muito utilizado em todas as áreas do conhecimento para estudar possíveis relações entre duas ou mais variáveis.

(a) Seja A uma matriz de cinco linhas e duas colunas: a primeira coluna contém as idades tabuladas das árvores e a segunda coluna tem todas as entradas iguais a 1. Além disso, seja B a matriz coluna cuja entrada na linha i, $1 \le i \le 5$, é o DAP correspondente à idade que aparece na linha i de A. Escreva explicitamente A e B.

(b) Pode-se demonstrar que os valores a e b são as soluções do sistema $A^t \cdot A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^t \cdot B$, em que A^t é a matriz transposta de A.

Encontre a e b.

(c) De acordo com os resultados obtidos nos itens anteriores, quanto é o DAP de um carvalho de 40 anos?

PROBLEMA 2

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.

Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

PROBLEMA 3

Neste problema determinaremos todas as funções f com domínio nos reais positivos e assumindo valores reais tais que $x^{f(y)} = y^{f(x)}$ para quaisquer x, y.

(a) Prove que, para toda função satisfazendo a condição dada, $f(1) = 0$.

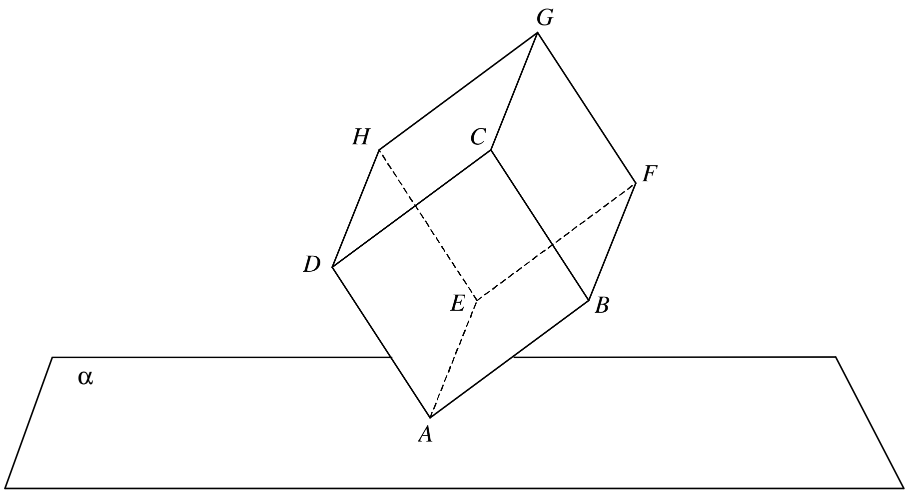
(b) Prove que, para toda função satisfazendo a condição dada, $\dfrac{f(x)}{\ln x}$ é constante, $x \neq 1$.

A expressão $\ln x$ representa o logaritmo neperiano de x (base $e \approx 2{,}72$).

(c) Determine todas as funções f que satisfazem a condição dada.

PROBLEMA 4

Na figura a seguir, *ABCDEFGH* é um cubo de aresta 5, sendo que o vértice *A* pertence a um plano α. As distâncias dos vértices *B* e *E* ao plano α são iguais a 3.



(a) Calcule a distância do vértice *F* ao plano α.

(b) Mostre que o plano determinado pelos pontos *A*, *D* e *F* é perpendicular ao plano α.

(c) Prove que a reta *CH* é paralela ao plano α e calcule a sua distância a esse plano.

PROBLEMA 5

Nos aviões, o cartão de embarque indica, entre outras coisas, o lugar onde o passageiro deve se sentar.

Murali, o primeiro passageiro a embarcar em um avião, com lugar para 100 pessoas, perdeu seu cartão de embarque, e por isso sentou-se em um assento que escolheu aleatoriamente. Em seguida, cada um dos demais 99 passageiros sentou-se em seu lugar, se este estava livre, ou caso contrário escolheu ao acaso um dos assentos vagos.

Seja $P(k)$ a probabilidade de o k-ésimo passageiro a embarcar sentar-se em seu lugar designado.

(a) Calcule $P(2)$, $P(3)$ e $P(4)$.

(b) Encontre uma expressão para $P(k)$, $2 \leq k \leq 100$. Não se esqueça de que você deve justificar sua resposta.