XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)
Nível β (7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Para um medicamento experimental ser testado, ele deve ser comparado com um placebo (substância inerte).
Um novo medicamento, o *OPMinol*, foi testado em dois grupos A e B, sem pessoas em comum.

(a) No grupo A, o OPMinol foi administrado a 100 pessoas, sendo que em 66 delas obteve-se o efeito desejado; o placebo foi aplicado em 40 pessoas, e em 24 destas o efeito desejado foi constatado. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, calculando as porcentagens de sucessos do OPMinol e do placebo, respectivamente.

Grupo A	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol	100	66	
Placebo	40	24	

(b) Os resultados do grupo B estão resumidos na tabela a seguir. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, determinando o número de pessoas nas quais o medicamento foi aplicado e o número de casos em que o placebo foi bem sucedido.

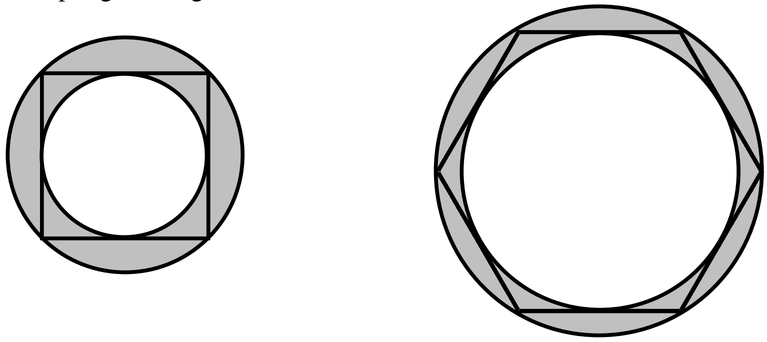
Grupo B	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		180	90%
Placebo	500		87%

(c) Para aprovar o medicamento no teste, é necessário que no resultado total (isto é, juntando-se os dois grupos) ele possua uma maior porcentagem de sucessos quando comparada ao placebo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a. Em seguida, diga se o OPMinol deve ser aprovado ou não. Dois valores já foram colocados para você.

Grupos A e B juntos	Número de pessoas testadas	Sucessos	Porcentagem de sucessos
OPMinol		246	
Placebo	540		

PROBLEMA 2

(a) Nas figuras a seguir, temos dois polígonos regulares e suas circunferências inscrita e circunscrita.



Em cada uma das figuras, a área em destaque entre as circunferências inscrita e circunscrita é $4\pi\ \text{cm}^2$. Mostre que as medidas dos lados do quadrado e do hexágono são iguais.

(b) Considere um polígono regular de 2006 lados cuja área entre as circunferências inscrita e circunscrita é $4\pi\ \text{cm}^2$. Qual é a medida de seu lado?

PROBLEMA 3

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.

Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?

(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

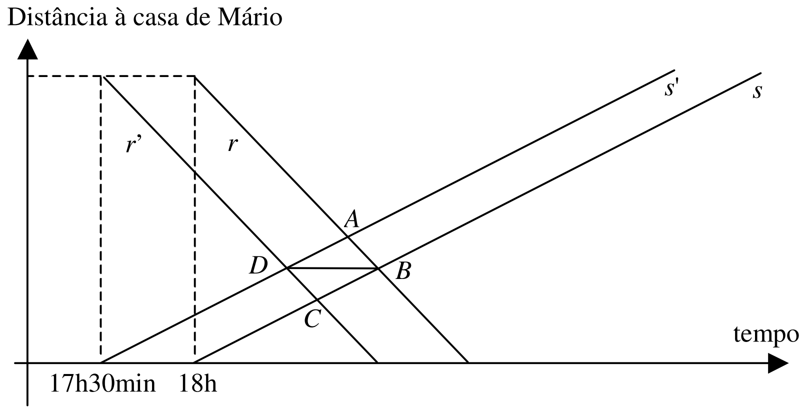
(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

PROBLEMA 4

Joana e Mário partiram de suas respectivas casas simultaneamente às 18h, um de encontro ao outro. Ambos desenvolvem velocidades constantes e diferentes. Sabe-se que se Joana tivesse partido às 17h30min, Mário teria andado 2 quilômetros a menos.

No gráfico a seguir, as retas *r* e *s* representam as distâncias de Joana e Mário à casa de Mário, respectivamente, em função do tempo, na situação em que ambos partem simultaneamente. A reta *r*' representa a distância de Joana à casa de Mário se Joana saísse às 17h30min. Nesse problema descobriremos o que aconteceria se Mário tivesse partido às 17h30min e Joana tivesse partido às 18h. A reta *s*' representa a distância de Mário à sua casa nesta última situação.



(a) A partir do significado físico da tangente do ângulo que as retas formam com o eixo do tempo, ou seja, o quociente $\dfrac{\textit{Variação do espaço}}{\textit{Variação do tempo}}$, justifique por que o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.

(b) Mostre que a reta *BD* é paralela ao eixo do tempo.

(c) Se Mário tivesse partido às 17h30min e Joana partisse às 18h, quanto a menos Joana teria andado?

PROBLEMA 5

(a) Sejam x, y, z, w e α números reais tais que $\dfrac{x}{y}=\dfrac{z}{w}=\alpha$.

Prove que se $y+w\neq0$ então $\dfrac{x+z}{y+w}=\alpha$.

(b) Os números reais a, b, c e r são tais que

$$\frac{b(c-a)}{a(b-c)}=\frac{c(b-a)}{b(c-a)}=r$$

Mostre que $\dfrac{1}{r}+1=r$ e calcule todos os valores que r pode assumir. Não se esqueça de que, para provar que um valor de r é possível, você também deve mostrar que realmente existem valores a, b e c que satisfazem as igualdades acima.