XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (11 de novembro de 2006)

Nível α (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Para um medicamento experimental ser testado, ele deve ser comparado com um placebo (substância inerte).
Um novo medicamento, o *OPMinol*, foi testado em dois grupos A e B, sem pessoas em comum.

(a) No grupo A, o OPMinol foi administrado a 100 pessoas, sendo que em 66 delas obteve-se o efeito desejado; o placebo foi aplicado em 40 pessoas, e em 24 destas o efeito desejado foi constatado. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, calculando as porcentagens de sucessos do OPMinol e do placebo, respectivamente.

Grupo A	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol	100	66	
Placebo	40	24	

(b) Os resultados do grupo B estão resumidos na tabela a seguir. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a, determinando o número de pessoas nas quais o medicamento foi aplicado e o número de casos em que o placebo foi bem sucedido.

Grupo B	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol		180	90%
Placebo	500		87%

(c) Para aprovar o medicamento no teste, é necessário que no resultado total (isto é, juntando-se os dois grupos) ele possua uma maior porcentagem de sucessos quando comparada ao placebo. Copie a tabela no seu *Bloco de resoluções* e complete-a. Em seguida, diga se o OPMinol deve ser aprovado ou não. Dois valores já foram colocados para você.

Grupos A e B juntos	**Número de pessoas testadas**	**Sucessos**	**Porcentagem de sucessos**
OPMinol		246	
Placebo	540		

PROBLEMA 2

O *coeficiente de isolamento* é uma medida da capacidade de isolamento térmico de um material: quanto maior este coeficiente, menor é a quantidade de calor perdida através de uma parede feita deste material. Ou seja, quanto maior o coeficiente de isolamento, melhor o material protege do frio.
A quantidade de calor Q perdida por uma parede em uma hora depende não só do material utilizado para construí-la, mas também de sua área e da diferença entre as temperaturas interna e externa. Q é dado pela fórmula

$$Q = \frac{\text{Área} \times \text{Diferença de temperatura}}{\text{Coeficiente de isolamento}}$$

onde Q é dado em BTU por hora, a área da parede é dada em pés quadrados e a diferença de temperatura é dada em graus Fahrenheit. A unidade BTU é a abreviatura de *British Thermal Unit*. Sendo essa uma unidade de origem britânica, a fórmula acima utiliza unidades do antigo sistema de medidas desenvolvido no Reino Unido. Desta forma, devemos fazer os cálculos somente com essas unidades. Caso os dados estejam em outras unidades, devemos convertê-las.
Na casa de Aino, em Helsinque, Finlândia, a parede que separa a sua sala e o lado de fora tem 9 pés de altura e 12 pés de largura. Em um certo dia no inverno, a temperatura interna da casa era de 20 graus Celsius.

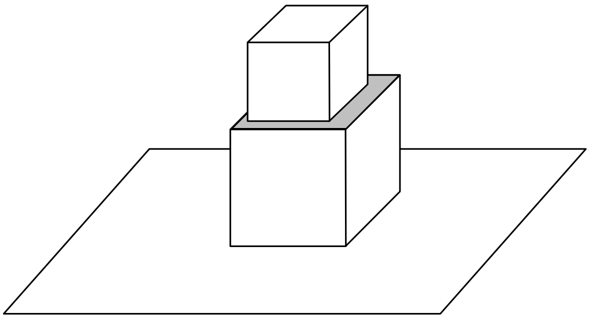
(a) Para converter graus Celsius em Fahrenheit, utilizamos a fórmula $F = \frac{9 \cdot C}{5} + 32$, sendo F e C a temperatura em graus Fahrenheit e Celsius, respectivamente. Qual era a temperatura, em graus Fahrenheit, dentro da sala de Aino?

(b) Se a parede for construída com blocos com coeficiente de isolamento igual a 1,8 e a perda de calor através dela é 4320 BTU por hora, qual era a temperatura, em graus Celsius, fora da casa de Aino?

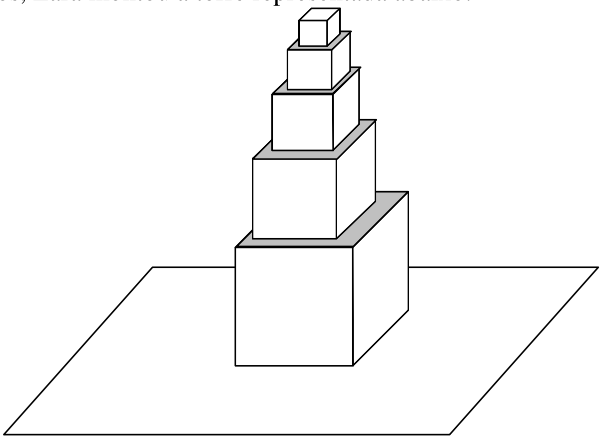
(c) No rigoroso inverno finlandês, a menor temperatura é –40 graus Fahrenheit e deseja-se que a temperatura interna da casa seja sempre de pelo menos 60 graus Fahrenheit. Suponha que a perda média de calor nos dias mais frios seja 4800 BTU por hora. Para isto, qual o menor coeficiente de isolamento dos blocos que se pode utilizar para construir a parede?

PROBLEMA 3

Lara estava brincando no tapete e resolveu montar uma torre. Ela começou colando dois cubos, obtendo o sólido representado abaixo:



Esse sólido tem 24 arestas (12 de cada cubo) e 11 faces (5 de cada cubo e a que está destacada).
Ao terminar de colar os seus 5 cubinhos, Lara montou a torre representada abaixo:



(a) Quantas arestas e faces tem a torre completa?
(b) A aresta do maior cubo mede x cm e a aresta de cada um dos outros cubos é 3 cm menor que a aresta do cubo imediatamente abaixo. Sabendo-se que soma das áreas das quatro faces destacadas é 240 cm^2, calcule x.

PROBLEMA 4

No planeta *Fungus*, há três tribos: os *angos*, os *mincos* e os *zambos*. *Angos* sempre falam a verdade, *mincos* sempre mentem e *zambos* podem mentir ou falar a verdade. Apesar disso, eles são idênticos na aparência e usam até roupas iguais!
(a) Ao chegar a *Fungus*, a tradição do planeta impõe que pelo menos um representante de cada tribo o receba. Na sua visita, você encontra três seres. Eles conhecem de qual tribo é cada um dos outros, mas são de poucas palavras: cada um só fala quando perguntado e responde apenas a questões do tipo "... é um ...?" (como, por exemplo, "Ele é um ango?" ou "Você é um zambo?") com um sim ou um não.
Descreva como descobrir a tribo de cada um. *Atenção*: Você pode fazer quantas perguntas desejar.
(b) Agora suponha que quatro seres lhe recebam. Como manda a tradição, há pelo menos um de cada tribo. Novamente eles conhecem as identidades um dos outros e só respondem às perguntas descritas no item a. Sempre é possível descobrir a tribo de cada um? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 5

No código numérico de diversos produtos, como, por exemplo, aquele que aparece no código de barras, utiliza-se o seguinte esquema para detectar erros de digitação: multiplicando-se cada dígito alternadamente por 1 e 3 e adicionando-se os resultados, sempre se obtém um múltiplo de 10. Por exemplo, um possível código de um produto é 4905370265546, pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+4\times3+6\times1=120$$

é um múltiplo de 10.
Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto pois

$$4\times1+9\times3+0\times1+5\times3+3\times1+7\times3+0\times1+2\times3+6\times1+5\times3+5\times1+6\times3+4\times1=124$$

não é um múltiplo de 10.
Assim, conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.
(a) O último dígito do código de um produto é chamado *dígito de verificação*. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um ■:

789103304863■

Qual é esse dígito?
(b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a *transposição*. Mais precisamente, a *transposição de dois dígitos consecutivos* ocorre quando em vez de se digitar *ab* digita-se *ba*, onde *a* e *b* representam algarismos distintos.

(i) Um corretivo líquido tem código 789**72**54113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

(ii) Como vimos no item anterior, o esquema acima é capaz de detectar *quase todos* os erros de transposição. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos *ab* cuja transposição *ba* **não** é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.

(c) Quantos códigos de produto são da forma 7897073010*xyz*, em que *x*, *y* e *z* são dígitos?