XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

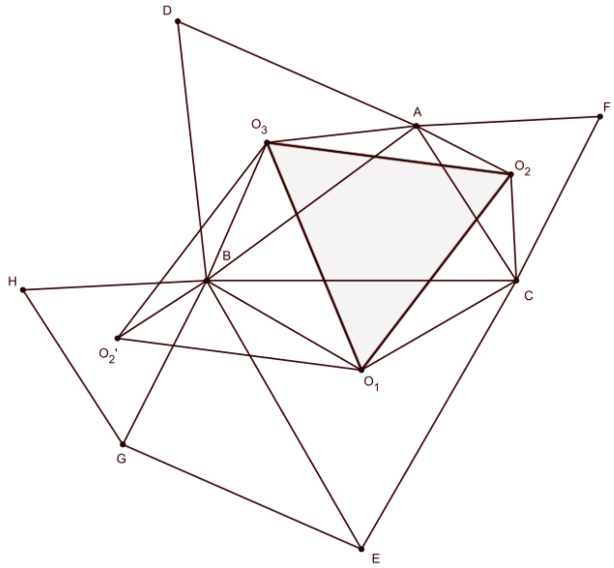
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Napoleão Bonaparte (1769 - 1821) é uma figura histórica muito importante. Ele foi um líder político e militar da França de 1804 até 1815. Apesar de Napoleão ser muito conhecido, muitas pessoas não conhecem o Teorema de Napoleão.

O Teorema de Napoleão afirma que se tomarmos um triângulo qualquer e construirmos três triângulos equiláteros externamente sobre seus lados então os centros desses três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero. Nesse problema, você vai provar o Teorema de Napoleão. Os historiadores não têm certeza se o Napoleão realmente provou esse teorema que leva seu nome. Agora você deve pensar "se não sabem nem se Napoleão conseguiu provar, como eu vou fazer isso?". Não se preocupe! Nós vamos ajudá-lo!

Considere um triângulo ABC e triângulos equiláteros ABD, BCE e CAF construídos externamente sobre seus lados. Sejam O_1, O_2 e O_3 os centros dos triângulos ABD, BCE e CAF, respectivamente. Construímos sobre o lado BE o triângulo GEB congruente ao triângulo ABC e sobre o lado BG mais um triângulo equilátero BGH de centro O_2'.



Como pensamos nisso? Uma propriedade curiosa dos triângulos do Teorema de Napoleão é que podemos cobrir todo o plano usando apenas cópias desses triângulos. Para mais detalhes você pode olhar a prova do nível alfa.

a) Prove as seguintes congruências de triângulos: $\Delta O_2AO_3 \cong \Delta O_2'BO_3$ e $\Delta O_2CO_1 \cong \Delta O_2'BO_1$.
b) Prove que $\angle O_2O_1O_2' = \angle O_2O_3O_2' = 120°$. Você não pode usar que o triângulo $O_1O_2O_3$ é equilátero. Nós não demonstramos isso ainda!
c) Conclua a demonstração do Teorema de Napoleão provando que $\Delta O_1O_2O_3$ é equilátero.

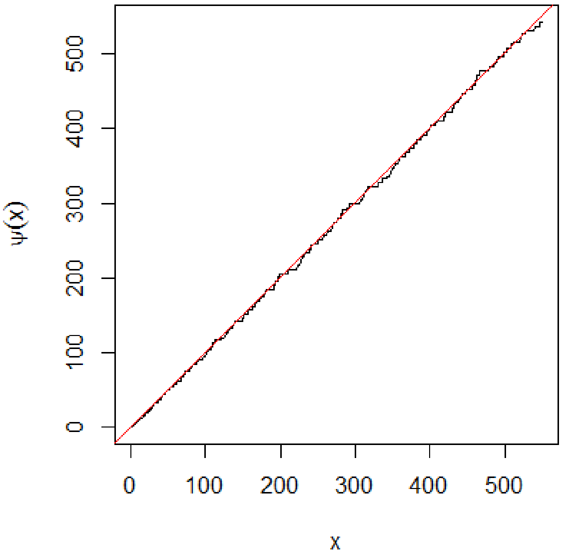
PROBLEMA 2

Sendo p um número primo positivo e x um número real positivo, $T_p(x)$ é igual ao número de potências de p, com expoente positivo, menores ou iguais a x, ou seja, ela conta as potências de um determinado primo. Por exemplo, $T_5(30) = 2$, pois as potências de 5 menores ou iguais a 30 são 5 e 25.
Por volta de 1850, o matemático russo Pafnuti Chebyshev criou a função $\psi(x)$ (ψ é a letra grega psi). Ela conta as potências de todos os primos menores ou iguais a x, porém tais potências são contadas com peso $\ln p$.

Por exemplo, tomemos $x = 20$. As potências de primos menores ou iguais a 20 são $2, 4, 8, 16$ (potências de 2); $3, 9$ (potências de 3) e os números primos $5, 7, 11, 13, 17, 19$. Assim, para calcular $\psi(20)$, nós necessitamos contar as quatro potências de 2 com peso $\ln 2$, as duas potências de 3 com peso $\ln 3$ e cada um dos outros seis primos com um peso que é o seu próprio logaritmo natural. Ou seja:

$$\psi(20) = (T_2(20) \times \ln 2) + (T_3(20) \times \ln 3) + (T_5(20) \times \ln 5) + (T_7(20) \times \ln 7) +$$
$$(T_{11}(20) \times \ln 11) + (T_{13}(20) \times \ln 13) + (T_{17}(20) \times \ln 17) + (T_{19}(20) \times \ln 19) =$$
$$4 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 + \ln 13 + \ln 17 + \ln 19 \approx 19{,}266$$

O valor é aproximadamente 20 e não é coincidência: a função $\psi(x)$ é aproximadamente igual a x. Veja o gráfico a seguir:

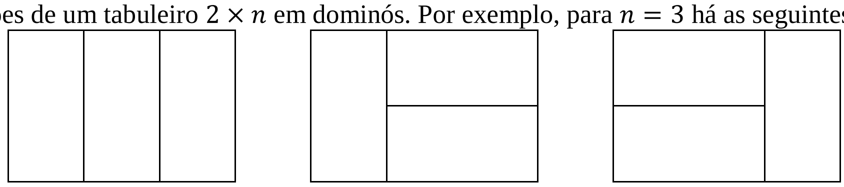


a) Prove que $\log_p(x) - 1 < T_p(x) \leq \log_p(x)$.
b) Considerando o item anterior podemos dizer que $T_p(x)$ é, aproximadamente, igual a $\log_p x$. Utilizando tal aproximação, mostre que $\psi(x)$ é, aproximadamente, igual a $\pi(x) \cdot \ln x$, em que $\pi(x)$ é função que representa o número de primos positivos menores ou iguais a x.
c) Utilizando as informações oferecidas na questão estime o valor de $\pi(500)$, dado que $\ln 2 \approx 0{,}69$ e $\ln 5 \approx 1{,}60$. Ou seja, você deve estimar o número de primos positivos menores do que 500.
Nessa questão talvez você deseje usar a fórmula de mudança de base dos logaritmos: sendo a, b e c maiores do que 0 *e diferentes de* 1*:*

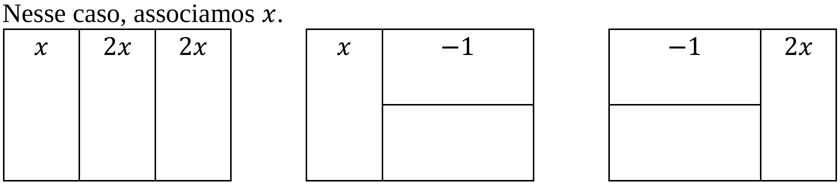
$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

Observação: a função $\ln x$ *representa o logaritmo de* x *na base* e.

PROBLEMA 3
Os *polinômios de Chebyshev*, denotados por $\boldsymbol{T_n}$, são aqueles que satisfazem a identidade trigonométrica $\boldsymbol{\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)}$. Por exemplo, como $\boldsymbol{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$, temos $\boldsymbol{T_2(x) = 2x^2 - 1}$, e sendo $\boldsymbol{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$, $\boldsymbol{T_3(x) = 4x^3 - 3x}$.
Agora considere as divisões de um tabuleiro $2 \times n$ em dominós. Por exemplo, para $n = 3$ há as seguintes três possibilidades:



Agora, associe a cada par de dominós horizontais o número -1 e a cada dominó vertical o número $2x$ exceto quando o dominó está na extrema esquerda. Nesse caso, associamos x.



Em seguida, calculamos os produtos dos números em cada divisão e somamos os monômios obtidos: $x \cdot 2x \cdot 2x + x \cdot (-1) + (-1) \cdot 2x = 4x^3 - 3x = T_3(x)$. Coincidência?? Veremos que não!

a) Utilizando a *fórmula de Prostaférese* $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, mostre que $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.
b) Calcule $\boldsymbol{A_1(x)}$ e $\boldsymbol{A_2(x)}$. Não se esqueça de fazer os desenhos e marcar seus valores associados!
c) O que acontece com os monômios correspondentes a cada divisão se colocamos um dominó vertical à sua direita?
d) Sendo $A_n(x)$ a soma dos monômios correspondentes às divisões de um tabuleiro $2 \times n$. Explique por que $A_n(x) = 2x \cdot A_{n-1}(x) - A_{n-2}(x)$ e conclua que $A_n(x) = T_n(x)$ para todo n inteiro positivo. Não era coincidência!

PROBLEMA 4

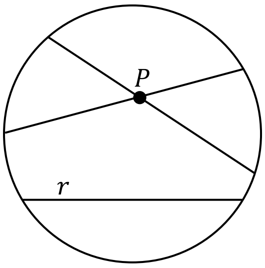
A geometria que estudamos é conhecida como *geometria euclidiana*. Existem outros tipos de geometria, que são estudados em outros contextos, como a *geometria hiperbólica*, que tem aplicações, por exemplo, em teoria da relatividade restrita.

A principal diferença entre a geometria hiperbólica e a geometria euclidiana é o *postulado das paralelas*, que é mudado para

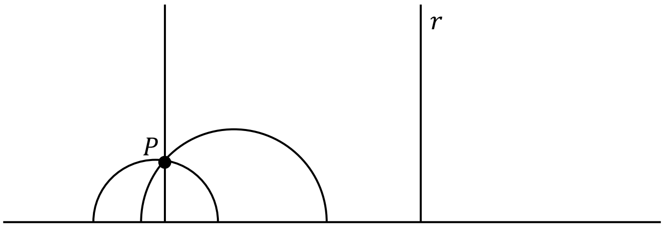
> Para qualquer reta r e um ponto P fora de r, existem no mesmo plano de P e r pelo menos *duas* retas que passam por P e não cortam r.

A questão agora é como visualizar a geometria hiperbólica para refletir esse novo postulado. Isso inclui representar retas com curvas e representar um plano com um círculo ou um semiplano. Por isso, vários modelos para representar o plano hiperbólico foram desenvolvidos. Dois deles são:

- O *modelo de Klein*, em que as retas correspondem a cordas de uma circunferência.



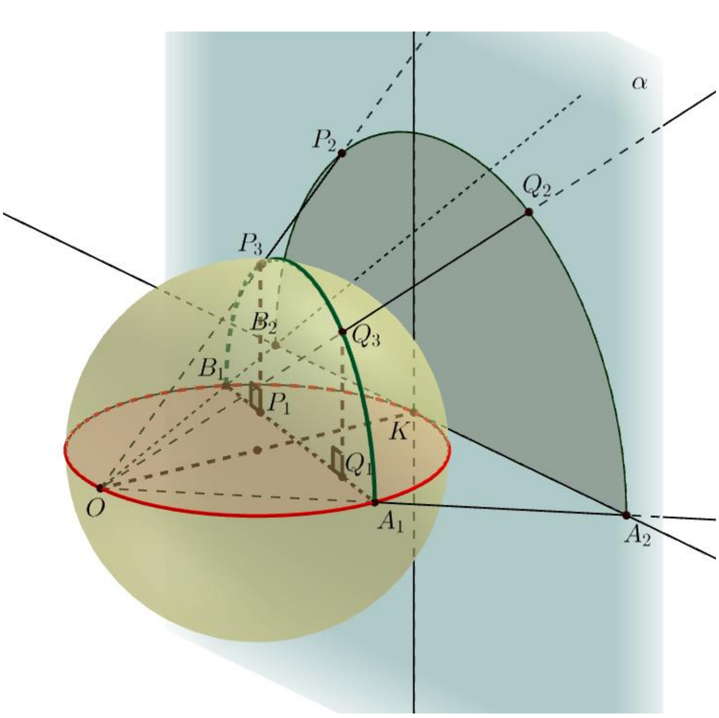
- O *semiplano de Poincaré*, em que as retas correspondem a semirretas ortogonais ou semicircunferências no interior de um semiplano.

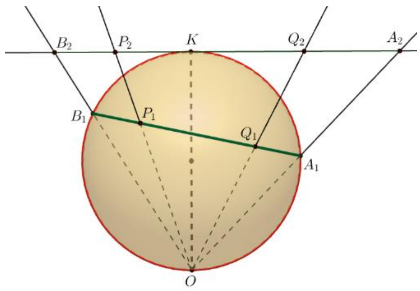


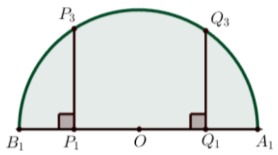
Como sabemos que os modelos correspondem à mesma geometria? Uma maneira é utilizar o *modelo do hemisfério*, em que as retas são representadas por secções de planos no hemisfério. Diversos tipos de projeções mostram as relações entre as geometrias. Vamos mostrar uma relação entre o modelo de Klein e o semiplano de Poincaré.

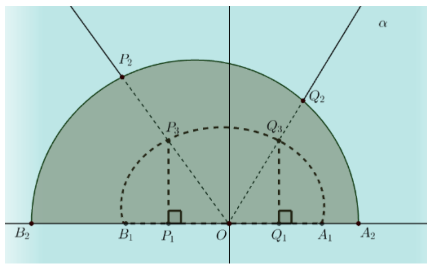
Considere uma circunferência de diâmetro OK representando o modelo de Klein e uma "reta" A_1B_1. Os pontos sobre a corda A_1B_1 são projetados no hemisfério superior da esfera de diâmetro OK fornecendo um arco de extremos A_1 e B_1. Em seguida, esse arco é projetado sobre um plano α e como resultado tem-se uma semicircunferência $\mathcal{C}$ no semiplano superior do plano α; $\mathcal{C}$ é uma "reta" no semiplano de Poincaré correspondente. Note que cada "reta" (corda) do modelo de Klein está relacionada com uma "reta" (semicircunferência ou semirreta) no semiplano de Poincaré.

As figuras a seguir mostram um exemplo de "reta" A_1B_1 no modelo de Klein, a "reta" A_2B_2 no semiplano de Poincaré correspondente e as projeções descritas. As figuras menores são pontos de vista diferentes para ajudar a compreensão.

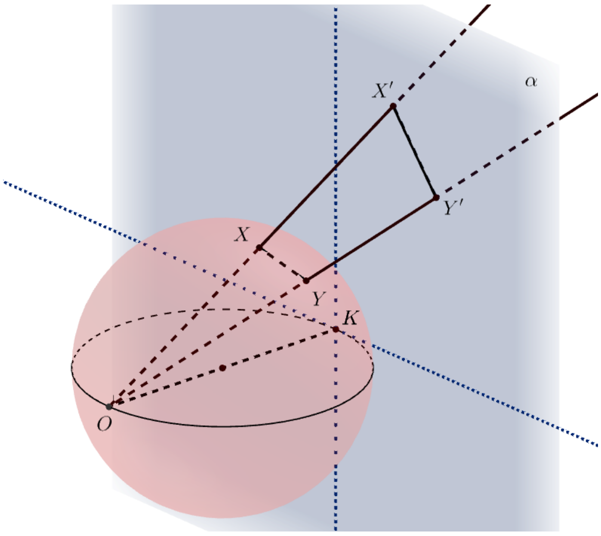








A figura a seguir representa uma esfera de diâmetro OK e um plano α perpendicular à OK que passa por K. Para cada ponto $X \neq O$ na superfície da esfera marca-se o ponto X' onde a reta OX fura o plano α.

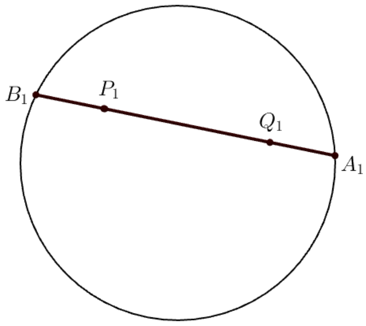


a) Prove que os triângulos OXK e OKX' são semelhantes e conclua que $OX \cdot OX' = OK^2$.
b) Considere mais um ponto Y na superfície da esfera e o ponto Y' onde OY fura o plano α. Prove que

$$X'Y' = \frac{OK^2 \cdot XY}{OX \cdot OY}.$$

Considerando que os modelos têm distorções de distâncias, usamos fórmulas diferentes para calcular distâncias hiperbólicas. No modelo de Klein, a distância hiperbólica entre dois pontos P_1 e Q_1 é dada por

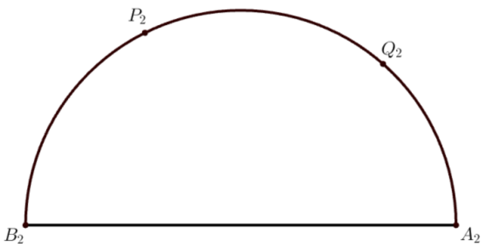
$$d_{\text{Klein}}(P_1, Q_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{A_1Q_1 \cdot P_1B_1}{A_1P_1 \cdot Q_1B_1}.$$



Nessa fórmula, os segmentos A_1Q_1, P_1B_1, A_1P_1 e Q_1B_1 possuem comprimentos usuais de geometria euclidiana.

Usando a correspondência do modelo do hemisfério, podemos relacionar os pontos P_1 e Q_1 aos pontos P_2 e Q_2, respectivamente. No semiplano de Poincaré, a distância é calculada usando

$$d_{\text{Poincaré}}(P_2, Q_2) = \ln \frac{A_2Q_2 \cdot P_2B_2}{A_2P_2 \cdot Q_2B_2}.$$



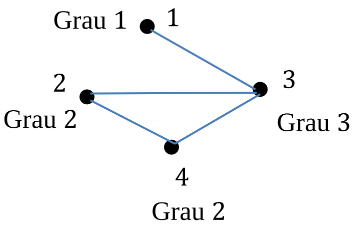
c) Prove que $d_{\text{Klein}}(P_1, Q_1) = d_{\text{Poincaré}}(P_2, Q_2)$, ou seja, prove que

$$\ln \frac{A_2Q_2 \cdot P_2B_2}{A_2P_2 \cdot Q_2B_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{A_1Q_1 \cdot P_1B_1}{A_1P_1 \cdot Q_1B_1}.$$

Observação: a função $\ln x$ *representa o logaritmo de* x *na base* e.

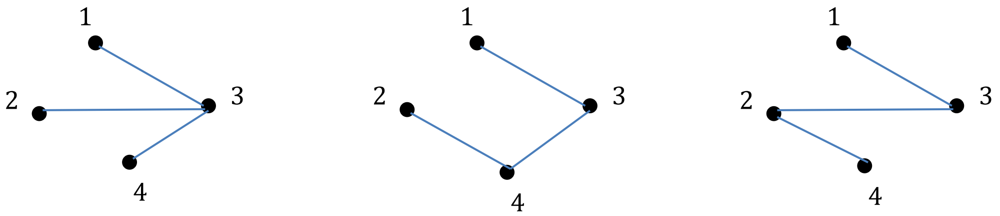
PROBLEMA 5

Grafos têm várias aplicações em computação e matemática. Um grafo é um par de conjuntos; um deles é o conjunto de *vértices*, que costumamos representar por pontos e o outro é o conjunto de *arestas*, que ligam pares de vértices. A quantidade de arestas que passam por um vértice v é o *grau* de v. Podemos organizar as arestas e os graus em matrizes. A *matriz dos graus* D é uma matriz cujos elementos na diagonal são os graus dos vértices e a *matriz de adjacência* A é definida por $a_{ij} = 1$ se os vértices i e j estão ligados por uma aresta e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Na figura a seguir, temos um grafo, com graus indicados, a matriz dos graus D e a matriz de adjacência A correspondentes.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que há várias maneiras de interpretar um grafo; uma delas, por exemplo, é uma rede de computadores. Uma maneira que utiliza o mínimo de arestas para conectar todos os computadores é uma *árvore*. Uma árvore com arestas contidas no conjunto de arestas de um grafo é uma *árvore geradora*. O grafo que acabamos de ver tem 3 árvores geradoras:



Dois problemas importantes são saber a quantidade de árvores geradoras e como gerar árvores geradoras. O primeiro problema foi resolvido por Gustav Kirchhoff no século XIX, e o segundo problema tem várias soluções. Uma delas foi obtida por David Wilson em 1996. Greg Lawler, em 1999, obteve uma outra demonstração que conecta os dois problemas!

Essa demonstração tem dois ingredientes: um deles é a noção de *caminhos aleatórios*, e outra é uma propriedade de determinantes.

Primeiro, descrevemos o algoritmo para obter árvores geradoras.

I. Escolhemos um vértice v qualquer do grafo e numeramos os demais por $x_1, x_2, \dots, x_n$.

II. Começamos uma caminhada aleatória em x_1, ou seja, escolhemos uma aresta qualquer que sai de x_1, andamos para o vértice na outra extremidade da aresta escolhida y_1, escolhemos ao acaso outra aresta qualquer que sai de y_1 (incluindo y_1x_1), andamos para o próximo vértice, e assim por diante, até chegar a v. Cortamos todos os loops que formamos nesse processo, e obtemos um caminho de x_1 a v.

III. Tomamos o vértice x_i com menor índice que não está conectado e começamos outro caminho aleatório até chegar a um vértice já conectado. Novamente, cortamos os loops.

IV. Repetimos o passo III até acabarem os vértices.

O principal resultado desse algoritmo é que ele seleciona cada árvore geradora com a mesma probabilidade, ou seja, cada árvore geradora tem a mesma chance de ser obtida.

Vamos calcular algumas probabilidades. Note que a probabilidade de usar uma aresta xy dado que estamos no vértice x é $\frac{1}{d(x)}$, em que $d(x)$ é o grau de x. Ou seja, se y está ligado a x a probabilidade de ir de x a y é $\frac{1}{d(x)}$ e 0 se y não está ligado a x.

a) Mostre que o elemento p_{ij} da matriz $P = D^{-1}A$ é a probabilidade de ir diretamente do vértice i ao vértice j.

No nosso algoritmo, nós paramos se chegamos a algum vértice de um conjunto Δ de vértices. Nesse caso, a probabilidade de ficar no vértice é 1 e a probabilidade de sair dele é zero. Nesse caso, trocamos p_{ii} por 1 e p_{ij} e p_{ji} por 0 para $j \neq i$. Supondo que esses vértices são os de menores índices, a nossa matriz de probabilidade muda para

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & P_\Delta \end{bmatrix},$$

em que $[I \;\; 0]$ indica a identidade e a matriz nula para os vértices finais e $[R \; P_\Delta]$ indica os valores da matriz P correspondentes aos outros vértices.

Em probabilidade, uma *variável aleatória discreta* X é um conjunto de valores, cada um deles atrelado a uma probabilidade; o seu *valor esperado* $E(X)$ é a média aritmética obtida ao fazer muitos sorteios dessa variável, de acordo com suas probabilidades, e é igual a $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$.

Agora, considere a matriz G cujo elemento g_{ij} é o valor esperado da quantidade de visitas a um vértice j de um caminho aleatório que começa em i e termina em algum vértice de Δ.

b) Considerando o primeiro passo do caminho, mostre que

$$g_{ii} = 1 + \sum_{z \notin \Delta} p_{iz} g_{zi} \;\; \text{e, para } i \neq j, \;\; g_{ij} = \sum_{z \notin \Delta} p_{iz}\, g_{zj}$$

e conclua que $G = I + Q \cdot G$.

A conta anterior mostra que $G = (I - Q)^{-1}$.

c) Considerando que $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$, sendo r_i a probabilidade de um caminho que começa em i voltar a i, prove que $g_{ii} = \frac{1}{1-r_i}$.

d) Prove que a probabilidade de o caminho $(i_1 i_2 \ldots i_m i_{m+1})$ fazer parte da árvore geradora no algoritmo é

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{d(i_k)} \cdot g_{i_k i_k}^{\Delta_k},$$

em que $g_{i_k i_k}^{\Delta_k}$ é o elemento (i_k, i_k) da matriz G correspondente ao processo em que paramos se chegamos a um vértice de $\Delta_k = \Delta \cup \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ (se $k = 1$ usamos $\Delta_1 = \Delta$).

Com isso, podemos concluir que a probabilidade de obter uma árvore $\mathcal{A}$ a partir dos t caminhos $(i_{1,1} i_{1,2} \ldots i_{1,m_1+1})$, $(i_{2,1} i_{2,2} \ldots i_{2,m_2+1})$, …, $(i_{t,1} i_{t,2} \ldots i_{t,m_t+1})$, nessa ordem, é

$$P(\mathcal{A}) = \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{k=1}^{m_\ell} \frac{1}{d(i_{\ell,k})} \cdot g_{i_{\ell,k} i_{\ell,k}}^{\Delta_{\ell,k}},$$

em que $\Delta_{\ell,k}$ é obtido unindo o vértice $i_{\ell,k-1}$ a Δ, e começando inicialmente com $\Delta = \{v\}$.

Finalmente, para o final, usamos uma propriedade de determinantes. No que se segue, $(A)_{ij}$ é o elemento na linha i e coluna j da matriz A. A regra de Cramer nos permite provar a *fórmula da adjunta*, que diz que o termo $(M^{-1})_{ii}$ da inversa de uma matriz (inversível) M é dado por $(M^{-1})_{ii} = \frac{\det M_i}{\det M}$, em que M_i é a matriz obtida eliminando a linha i e a coluna i. Por exemplo, numa matriz 2×2 dada por $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$(M^{-1})_{11} = \frac{d}{ad - bc} = \frac{\det[d]}{\det M} = \frac{\det M_1}{\det M},$$

e observando que $\frac{1}{d} = d^{-1} = (M_1^{-1})_{22}$ é o elemento da linha original 2 e coluna original 2 da matriz M depois de eliminarmos a linha 1 e a coluna 1, podemos concluir que

$$\frac{1}{\det M} = \frac{(M^{-1})_{11}}{d} = (M^{-1})_{11} \cdot (M_1^{-1})_{22}$$

e) Generalize essa ideia para provar que, para uma matriz M de ordem n, e sendo $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação de $(1,2,3, \ldots, n)$,

$$\frac{1}{\det M} = \prod_{k=1}^{n} \left(M_{\Delta_k}^{-1}\right)_{i_k i_k},$$

em que M_{Δ_k} é a matriz eliminando as linhas e colunas $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$, e $M_{\Delta_1} = M$.

f) Prove que

$$P(\mathcal{A}) = \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{k=1}^{m_\ell} \frac{1}{d(i_{\ell,k})} \cdot g_{i_{\ell,k} i_{\ell,k}}^{\Delta_{\ell,k}} = \det\left(D^{-1} G^{\{v\}}\right),$$

em que $G^{\{v\}}$ é a matriz obtida sendo v o único vértice em que o processo termina.

g) Conclua os nossos dois problemas, ou seja, mostre que a probabilidade de a árvore $\mathcal{A}$ ser escolhida não depende da ordem dos vértices e que o número de árvores é $\det\left((D - A)^{\{v\}}\right)$.