XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 1970, iniciou-se no futebol inglês uma regra que vigora até os dias de hoje praticamente no mundo inteiro: a vitória passou a valer três pontos. A tese era de que com essa regra os times buscariam mais as vitórias, tornando assim as partidas mais disputadas e mais emocionantes para os torcedores, e que geraria mais gols.

É fato que houve um aumento no número de vitórias e também um aumento no número de vitórias por um gol de diferença. Assim, os gols não se tornaram mais abundantes, mas se tornaram mais decisivos e valiosos.

Os times passaram então a analisar seus resultados e calcular quantos pontos, em média, são conquistados por partida em relação ao número de gols marcados na partida. A primeira coisa a se perceber é que um único gol marcado garante, praticamente, um ponto (empate); dois gols deixam o time mais perto da vitória do que do empate; três ou quatro gols aproximam o time mais ainda da vitória, embora não seja garantida; marcar cinco ou mais gols garante, na imensa maioria das vezes, a vitória.

Dessa forma, os especialistas em futebol passaram a perceber que simplesmente somar os gols de um atacante não é a melhor maneira de avaliar a sua produtividade. Gols decisivos, aqueles que podem ser convertidos em vitórias e mais pontos, valem mais do que o terceiro e quarto gols, quando a vitória já está praticamente consumada. E mais, conseguiram modelar essa situação, chegando à conclusão de quantos pontos cada gol gera, em média, em uma determinada partida:

Primeiro gol do time	0,8 ponto
Segundo gol do time	1,0 ponto
Terceiro gol do time	0,6 ponto
Quarto gol do time	0,2 ponto
Quinto gol do time	0,1 ponto

Assim, percebemos que nem todo gol vale a mesma coisa, e que o segundo gol de um time é o mais valioso. Logo, além do total de gols marcados por um jogador, vale a pena calcular o total de pontos gerados pelos gols marcados.

a) Considere os dados de três grandes artilheiros da Série B do Brasileirão 2016 (até a 36ª rodada).

Jogador	Clube	Quantidade de primeiros gols	Quantidade de segundos gols	Quantidade de terceiros gols	Quantidade de quartos gols
Bill Lepo Lepo	Ceará	6	6	2	0
Nenê	Vasco	7	3	2	1
Felipe Garcia	Brasil de Pelotas	9	4	0	0

Veja que Bill Lepo Lepo marcou 14 gols e gerou $6 \times 0{,}8 + 6 \times 1{,}0 + 2 \times 0{,}6 = 12$ pontos. Calcule o número de gols e pontos gerados por Nenê e Felipe Garcia.

b) Analisando o campeonato inglês da temporada 2009/2010, veja como alguns atacantes contribuíram para a pontuação de seus times no campeonato.

Jogador	Número de gols	Pontos gerados
Wayne Rooney	26	20,6
Louis Saha	13	11,3
Cesc Fábregas	15	10,6
Dirk Kuyt	19	7,9

Denominamos *produtividade* o quociente $\frac{\text{Pontos gerados}}{\text{Número de gols}}$. Calcule a produtividade os quatro jogadores acima e coloque-os em ordem crescente de produtividade.

c) Mostre que não é possível que Dirk Kuyt tenha marcado somente primeiros, segundos ou terceiros gols pela sua equipe nas partidas em que participou.

PROBLEMA 2

Mathijs Coster - Editor da revista holandesa de Matemática *Pythagoras* – definiu, para um concurso da revista em 2006, um conjunto especial de números que denominaremos *números de Coster*: um número de Coster é um número que você pode obter com as quatro operações $(+, -, \times, /)$ utilizando cada um de seus dígitos exatamente duas vezes. É permitido usar parênteses, mas não é permitido justapor dígitos, por exemplo, com 1 e 2 não podemos formar 12.

Alguns exemplos de números de Coster:

$$1 = 1 \times 1; \qquad 25 = 5 \times 5 + 2 - 2;$$
$$193 = 1 + (9 - 1) \times (9 \times 3 - 3); \qquad 256 = (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6);$$
$$127.750 = 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times (7 \times (7 \times 7 + 2 + 1) + 1) + 0 + 0$$

a) Mostre que 36, 145 e 196 são números de Coster.

b) Um leitor de *Pythagoras* mostrou que existem 1000 números de Coster consecutivos:

$$235667475455989989888abc$$

Considerando que (você não precisa verificar isso!) $235667475455989989888000 =$

$$5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times 9 \times 9$$
$$\times (5 \times 7 \times 7 \times 7 - 6) \times (8 \times 8 \times (8 \times (5 \times 8 + 6) + 4) + 5)$$
$$\times (9 \times 9 \times (9 + 9 + 3) \times (4 \times 6 \times 6 \times 9 + 4 + 3) - 4) + 8 - 8$$

Prove que, ao adicionarmos $5 \times (2 \times 5 \times (a + a) + b + b) + (c + c)/2$ à expressão anterior, com a, b, c dígitos, podemos concluir que, de fato, existem 1000 números de Coster consecutivos.

PROBLEMA 3

O banco de problemas da IMO (International Mathematical Olympiad) consiste nos problemas sugeridos para compor a prova da IMO de cada ano. Os problemas do banco da IMO são interessantes. Vamos estudar um deles, de 2002!

Seja n um inteiro positivo. Uma sequência de n (não necessariamente distintos) inteiros positivos é chamada de ***cheia*** *se satisfaz as seguintes condições: para cada inteiro $k \geq 2$, se o número k aparece na sequência, então $k - 1$ também aparece e a primeira ocorrência de $k - 1$ vem antes da última ocorrência de k. Para cada n, existem quantas sequências cheias com n inteiros?*

Um jeito de resolver esse problema é usando uma *bijeção*, isto é, relacionar cada sequência cheia com exatamente um elemento de outro conjunto para o qual sabemos contar sua quantidade de elementos diretamente. Para o nosso problema o outro conjunto será formado pelos tabuleiros $n \times n$ com exatamente n pecinhas, uma em cada linha e uma em cada coluna.

Primeiro, mostraremos que cada configuração de pecinhas gera alguma sequência cheia. Numeramos as linhas e as colunas de 1 a n, na ordem usual. Os números das colunas correspondem a posições na sequência, ou seja, a coluna 1 corresponde ao primeiro número da sequência, a coluna 2 corresponde ao segundo número da sequência, e assim por diante. As linhas determinam os elementos da sequência. A linha 1 corresponde ao elemento 1. Agora, para cada linha subsequente, podemos aumentar em uma unidade ou não o elemento. Se a pecinha nessa linha estiver à direita da pecinha da linha anterior, aumentamos; se estiver à esquerda mantemos o valor.

Por exemplo, para $n = 6$ considere o tabuleiro a seguir.

	1	2	3	4	5	6
1					○	
2						○
3		○				
4				○		
5			○			
6	○					

Começamos na linha 1 escrevendo o elemento 1 na quinta posição. Como a pecinha na linha 2 está à direita da pecinha na linha 1 aumentamos uma unidade e escrevemos 2 na sexta posição. A pecinha na linha 3 está à esquerda da pecinha na linha 2 então mantemos o valor e escrevemos 2 na segunda posição. Seguindo para a linha 4 devemos aumentar o valor e escrever 3 na quarta posição, pois a pecinha está à direita da pecinha na linha 3. As outras duas linhas mostram que os números nas posições 1 e 3 são iguais a 3. Chegamos na sequência (3,2,3,3,1,2) que é cheia!

a) Determine a sequência cheia relacionada com o tabuleiro a seguir.

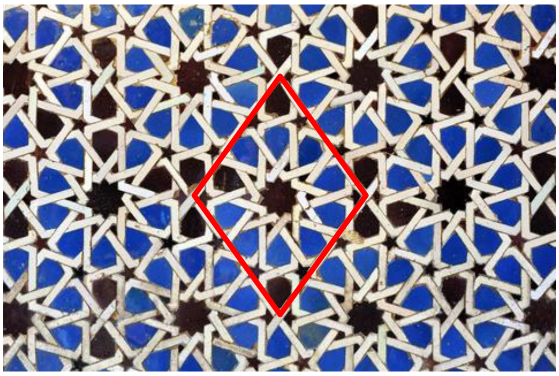
	1	2	3	4	5	6
1			○			
2				○		
3					○	
4		○				
5	○					
6						○

b) Explique por que toda sequência gerada por uma configuração de n pecinhas é cheia.
A partir da sequência cheia (2,3,1,2,3,2) podemos determinar a configuração relacionada. Primeiro note que o 1 diz que na primeira linha a pecinha deve aparecer na coluna 3. Em relação aos 2 já sabemos que são pecinhas nas colunas 1, 4 e 6. Podemos concluir que na linha 2 aparece uma pecinha na coluna 6.

	1	2	3	4	5	6
1			○			
2						○
3						
4						
5						
6						

c) Copie o tabuleiro 6×6 acima na *Folha de Respostas* e complete a configuração relacionada com a sequência cheia (2,3,1,2,3,2).
d) Para cada sequência cheia existe uma configuração de n pecinhas. Explique por quê.
e) Determine o número de sequências cheias com 6 termos.

PROBLEMA 4
Os mouros, que são povos do norte da África, habitaram a península ibérica e trouxeram várias influências em diversas áreas do conhecimento e da cultura. Uma delas, na arquitetura, é a decoração em padrões, como o seguinte, que aparece em Sevilha, na Espanha:



(créditos: Joserpizarro)

Após uma simplificação, podemos ver que o padrão é a repetição do losango destacado acima. Ele é cortado por dez rotações de 72° do par de retas paralelas que passam por P e Q na figura 1, e mais as seis retas indicadas na figura 3. A determinação das posições de P e Q será vista a seguir. Obtemos assim, uma estrela de dez pontas no centro e partes de estrelas de cinco pontas nas bordas.

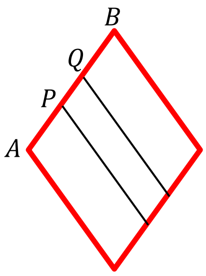


Figura 1

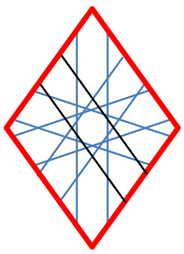


Figura 2

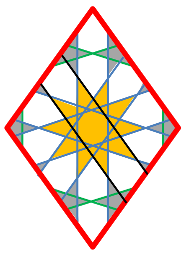
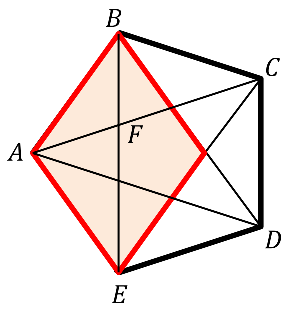


Figura 3

Para obter essas estrelas, usa-se o pentágono regular. De fato, o losango anterior é parte do pentágono ao lado.



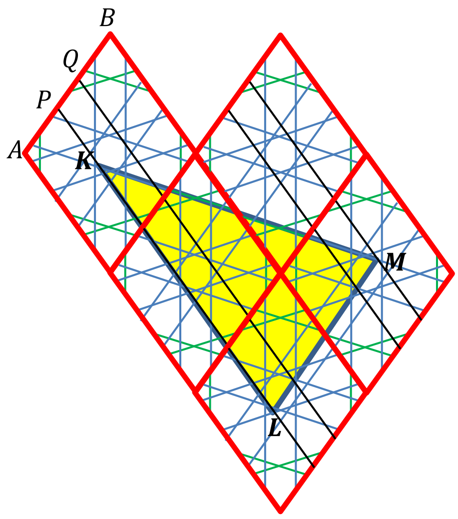
A razão $\frac{BE}{AB}$ é igual à *razão áurea* φ, que é a raiz positiva da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. De fato, como o ângulo interno do pentágono regular é $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$, no triângulo isósceles ABE temos $m(A\hat{B}E) = m(A\hat{E}B) = \frac{180°-108°}{2} = 36°$, analogamente $m(B\hat{A}C) = 36°$, e no triângulo AFE temos $m(E\hat{A}F) = 108° - 36° = 72°$ e $m(A\hat{F}E) = 180° - 36° - 72° = 72°$, ou seja, AFE é isósceles com $FE = AE$. Finalmente, note que FAB e ABE são semelhantes, de modo que

$$\frac{BF}{AE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow \frac{BE - AB}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} = 1 \Leftrightarrow (\varphi - 1)\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0\,.$$

Essa razão também aparece na hora de determinar as posições dos pontos P e Q. Sendo $AP = QB$, basta encontrar a razão $\frac{AP}{PQ}$. Mostraremos que

$$\frac{AP}{PQ} = \varphi.$$

Para isso, considere as cinco cópias do losango a seguir e o triângulo destacado KLM, em que K e L são pontos correspondentes dos decágonos centrais de dois losangos, LM é paralelo a AB, e M é um vértice do decágono central de um terceiro losango. Observe que KL e KM estão sobre algumas das retas da figura 2 que cortam os losangos.



a) Calcule os ângulos internos do triângulo KLM.
b) Explique por que $KL = 2AB$ e por que $LM = 2PB$.
c) Calcule $\frac{AB}{PB}$.
d) Observando que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, mostre que $1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$.
e) Mostre que $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{\varphi^2}$ e conclua que $\frac{AP}{PQ} = \varphi$.

PROBLEMA 5

Nós dizemos que $\frac{1}{Q}$ é uma *fração* k – *primal* se existem números inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ com $Q = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k$ e $\frac{1}{Q} = \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \cdots \pm \frac{1}{a_k}$ (para uma escolha adequada de sinais $\pm$). Por exemplo, $\frac{1}{630}$ é uma fração 3 – primal, pois $630 = 5 \times 7 \times 18$ e $\frac{1}{630} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{18}$.

a) Mostre que toda fração da forma $\frac{1}{n(n+1)}$, com n inteiro positivo, é 2 – primal.

b) Utilizando o item anterior, mostre que $\frac{1}{1806}$ é 5 – primal.

c) Suponha que $\frac{1}{abc}$ seja uma fração 3 – primal com $\frac{1}{abc} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$. Prove que $\frac{1}{(c)(2c-a)(2c+b)}$ também é 3 – primal com $\frac{1}{(c)(2c-a)(2c+b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{2c-a} - \frac{1}{2c+b}$.

d) A sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$, ou seja, a partir de F_2 cada termo da sequência é a soma dos dois anteriores. Os primeiros termos da sequência de Fibonacci são, portanto, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Sejam $a = F_n$, $b = F_{n+1}$ e $c = F_{n+2}$. Mostre que $2c - a = F_{n+3}$ e $2c + b = F_{n+4}$.

e) Demostre, utilizando os itens c e d, que $\frac{1}{F_{2016} \cdot F_{2017} \cdot F_{2018}}$ é 3 – primal.