XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

<u>Folha de Perguntas</u>

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Charles Ponzi foi um italiano que ficou famoso por um mau motivo nos Estados Unidos. Ele foi o criador de um tipo de esquema que ficou conhecido como *pirâmide*. Nesse tipo de esquema, as pessoas investem dinheiro visando um rendimento muito alto, mas não há aumento real da riqueza. O dono do esquema algumas vezes usa o dinheiro de novos investidores para pagar os rendimentos dos investidores anteriores, além de enriquecer com parte do dinheiro do esquema. Como em algum momento não haverá novos investidores, torna-se impossível sustentar o esquema por muito tempo.

A ideia inicial de Ponzi era um negócio de importação da Itália de selos internacionais de correspondência, chamados de IRC. Cada selo IRC comprado na Itália custava 2 liras e podia ser vendido em Boston nos Estados Unidos por 0,5 dólares.

a) Suponha que Ponzi possui 100 dólares para investir em selos IRC. Suponha que ele gasta 70 dólares no transporte dos selos e outros gastos na manipulação dos selos. Na época cada dólar podia ser trocado por 44 liras. Quantos dólares Ponzi ganharia após a venda dos selos IRC importados?

Infelizmente para Ponzi, esse negócio foi proibido pelo governo, pois o preço dos selos IRC eram mantidos por acordos internacionais e não podiam ser usados para lucrar. Mas Ponzi já havia conseguido muitos investidores para o seu negócio. Enquanto Ponzi conseguia novos investidores ele conseguia pagar os rendimentos dos primeiros investidores. Começando em janeiro de 1920, ele conseguia dobrar seus investidores a cada mês. Em julho de 1920, por complicações jurídicas houve uma corrida dos investidores para reaver o dinheiro que estaria com Ponzi. O esquema de Ponzi chegou ao fim por não conseguir pagar suas obrigações com os investidores e ele foi preso por fraude postal.

b) Wesley S. decide iniciar um esquema de pirâmide. Cada pessoa que entra no esquema de Wesley S. investe 10 dólares. Suponha que no mês um do esquema Wesley S. atraiu 100 investidores e que, a cada mês, Wesley S. consegue dobrar a quantidade total de investidores no seu esquema – ou seja, no mês dois haverá 200 investidores, no mês três 400 e assim por diante. Usando que 2^{10} é aproximadamente 1000, mostre que em dois anos o dinheiro no esquema de Wesley S. será superior à fortuna de Tony Stark, estimada em $12{,}4$ bilhões de dólares.

PROBLEMA 2

O *rating Elo* é uma maneira de calcular a força relativa entre enxadristas. Esse sistema, criado pelo físico Arpad Elo, é usando na organização dos principais torneios de xadrez em todo o mundo.

Dizemos que a *pontuação esperada* de um enxadrista em uma partida é igual a sua probabilidade de vitória mais metade da probabilidade de empate. Assim, sejam A e B enxadristas que tenham ratings, respectivamente, R_A e R_B. Utilizando o rating Elo, podemos estimar que a pontuação esperada de A é

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}}$$

e, analogamente, a pontuação esperada de B é

$$E_B = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_A - R_B}{400}}}$$

a) Prove que $E_A + E_B = 1$.

A Federação Internacional de Xadrez (FIDE) utiliza desde 1970 um ranking baseado nos ratings Elo. Para ter uma ideia dos valores dos ratings, podemos nos basear na tabela a seguir.

Rating	Título
Acima de 2700	Candidato a disputa do título mundial.
2500 a 2700	Grande Mestre Internacional (GMI)
2400 a 2500	Mestre Internacional (MI)
2300 a 2400	Mestre da FIDE
2200 a 2300	Candidato a Mestre
2000 a 2200	Expert
1800 a 2000	Classe A
1600 a 1800	Classe B
1400 a 1600	Classe C
1200 a 1400	Iniciante Forte
1000 a 1200	Iniciante

b) Pode-se estimar o rating de computadores e de antigos jogadores de xadrez. Por exemplo, Komodo 9.2, um dos melhores programas da atualidade tem um rating estimado de (uau!!) 3300. O enxadrista e matemático Edward Lasker, um dos melhores jogadores do início do século 20, teve o rating estimado em 2470. Verifique que a pontuação esperada de Lasker em jogo contra Komodo é menor do que 1%.
c) É claro que o rating de um jogador muda dependendo de seu desempenho. Suponha que um jogador tenha pontuação esperada E, porém tenha obtido S pontos. Então, sendo R o seu antigo rating, o seu novo rating R' será

$$R' = R + K(S - E)$$

Em que podemos adotar $K = 10$, para jogadores com rating acima de 2400 e pelo menos 30 jogos oficiais.
O jogador brasileiro melhor rankeado atualmente (novembro de 2015) é o GMI Rafael Leitão com rating 2633. O jogador alemão melhor rankeado é o GMI Liviu-Dieter Nisipeanu com rating 2683. Considere que em um match de 8 partidas Leitão vença Nisipeanu por 7 a 1. Qual seria o novo rating do GMI brasileiro?

PROBLEMA 3

Uma das sequências mais famosas do mundo é a *sequência de Fibonacci*. Os dois primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Para obter o terceiro termo você deve somar o segundo e o primeiro termos, ou seja, $F_3 = 1 + 1 = 2$. Para obter o quarto termo somam-se o terceiro e o segundo termos, realizando a operação $F_4 = 2 + 1 = 3$. E assim por diante. Desse modo, os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci são descritos a seguir.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sequências que começam com dois termos inteiros positivos e cada termo é a soma dos dois anteriores são conhecidas como *sequências Gibonacci*. Vamos usar a notação G_n para representar o termo na posição n de uma sequência Gibonacci. Por exemplo, se começarmos com $G_1 = 15$ e $G_2 = 11$, teremos a seguinte sequência Gibonacci.

$$15, 11, 26, 37, 63, 100, 163, 263, 426, 689, \ldots$$

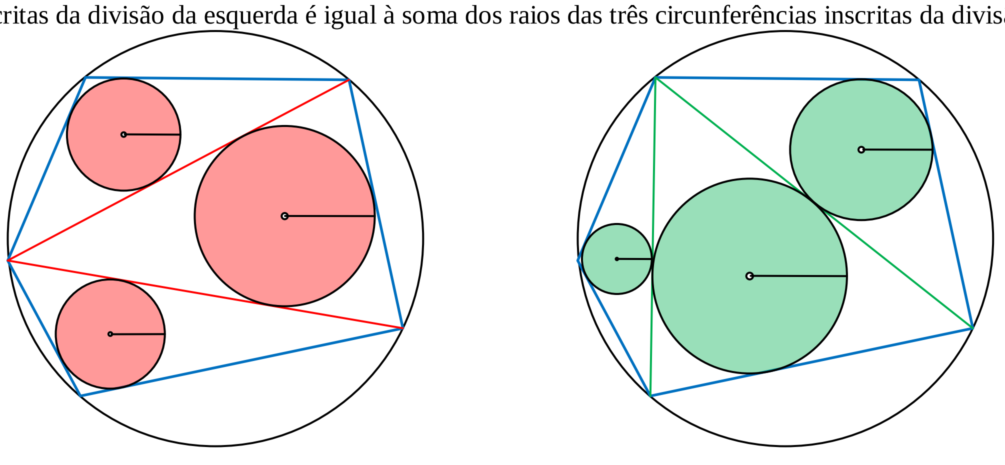
Note que, para essa sequência, temos $G_7 = 163$.
Vale lembrar que a sequência de Fibonacci é também uma sequência Gibonacci, basta considerar $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$.
a) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 26$. Mostre que esses são os únicos valores possíveis.
b) Sejam q e r inteiros positivos. Uma sequência Gibonacci foi construída de modo que $G_6 = 8q$ e $G_7 = 13q + r$. Determine, em função de q e r, os termos G_1 e G_2.
c) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 2016$.

PROBLEMA 4

No Japão, durante o período Edo (1603–1867), havia, pendurados em templos, tábuas com teoremas de geometria, chamados *sangaku* (“tábua matemática”, em japonês). Um deles, desenvolvido perto de 1800, tinha o seguinte teorema:

Se um polígono inscrito em um círculo é dividido em triângulos por diagonais, então a soma dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é uma constante, independente da divisão em triângulos.

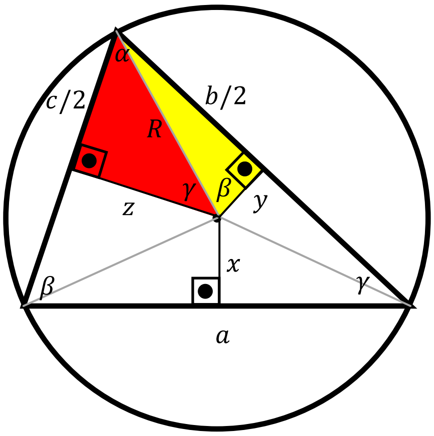
Nesse problema, demonstraremos o teorema para o caso particular do pentágono. Por exemplo, a soma dos raios das três circunferências inscritas da divisão da esquerda é igual à soma dos raios das três circunferências inscritas da divisão da direita.

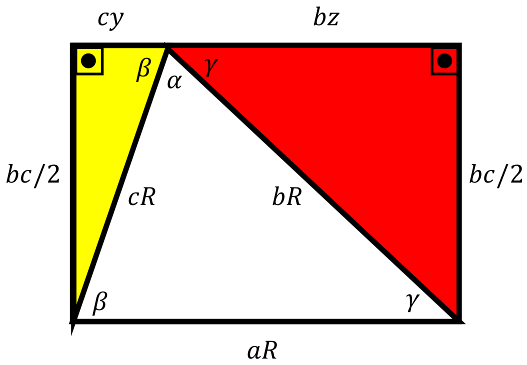


O ingrediente principal da demonstração desse sangaku é o *teorema de Carnot*:

A soma das distâncias x, y e z do centro da circunferência circunscrita a um triângulo acutângulo aos seus lados é igual à soma dos raios R e r das circunferências circunscrita e inscrita, respectivamente. Simbolicamente, $x + y + z = R + r$.

Vamos provar esse teorema.





Observando as figuras acima, temos $aR = bz + cy$. Analogamente, temos também $bR = az + cx$ e $cR = ay + bx$. Somando as equações, obtemos

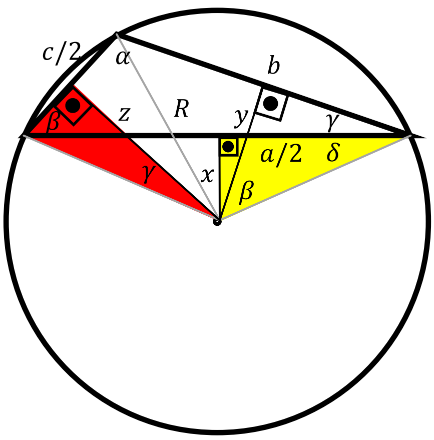
$$aR + bR + cR = bz + cy + az + cx + ay + bx \Leftrightarrow (a + b + c)R + ax + by + cz = (a + b + c)(x + y + z).$$

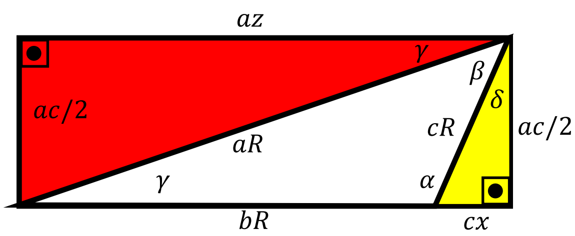
Mas sabemos também que $ax + by + cz = 2S$, em que S é a área de ABC, e que $S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2}$. Logo

$$(a + b + c)R + (a + b + c)r = (a + b + c)(x + y + z) \Leftrightarrow R + r = x + y + z,$$

e provamos o teorema de Carnot. Pode-se verificar que essa demonstração também funciona para o triângulo retângulo.

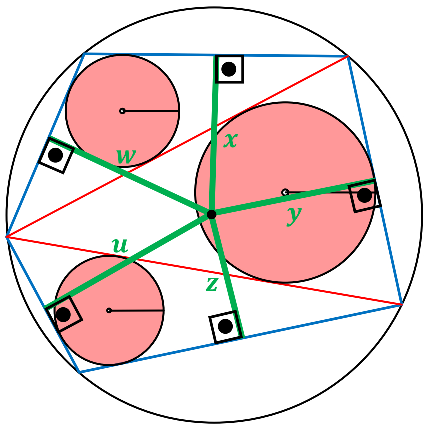
a) Para triângulos obtusângulos, o centro da circunferência circunscrita fica fora do triângulo e o teorema de Carnot pode ser generalizado: se x é a distância ao maior lado, temos $-x + y + z = R + r$.





Prove essa versão do teorema de Carnot. *Dica: veja as figuras acima!*

b) Agora provaremos o caso particular do sangaku para o pentágono. Isto é, prove que a soma dos raios das três circunferências inscritas é igual a $x + y + z + w + u - 3R$, em que x, y, z, w e u são as distâncias do centro da circunferência circunscrita aos lados do pentágono e R é o raio da circunferência circunscrita.



PROBLEMA 5

Como os computadores fazem para procurar palavras em um texto? Um procedimento para busca de padrões é o *algoritmo KMP* (de Knuth-Morris-Pratt), desenvolvido em 1974 por Donald Knuth e Vaughan Pratt e, independentemente, por James H. Morris. Ele funciona da seguinte forma: seja p um padrão procurado e t um texto onde p deve ser procurado.

A título de exemplo, seja p o padrão “`abcdabd`” e t o texto “`abc abcdab abcdabcdabde`”.

i) Primeiro, uma sequência q de números inteiros considerando as repetições de letras de p é elaborada e guardada; o primeiro número q_1 é sempre -1; para $i \geq 2$, o i-ésimo número q_i é obtido da seguinte forma: considere o padrão p_{i-1} formado pelas primeiras $i-1$ letras de p. O número q_i é a maior quantidade, menor do que $i-1$, dos caracteres finais de p_{i-1} que coincidem com os primeiros caracteres de p_{i-1}. No nosso exemplo, sendo p “`abcdabd`”, $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = (-1,0,0,0,0,1,2)$, de “**a**bcd**a**” ($q_5 = 1$) e “**ab**cd**ab**” ($q_6 = 2$).

ii) Procuramos a palavra p em t. Para isso, o computador usa uma variável m, indicando a posição do caracter em t onde a busca atual por p se inicia, e uma variável j, que indica qual caracter de p está sendo comparado. Inicialmente, $m = 1$ e $j = 1$ (ou seja, vamos comparar o primeiro caracter de p com o primeiro caracter de t). O computador compara cada caracter de p com o caracter de t da seguinte forma:

- Comparamos o j-ésimo caracter de p com o $(m+j-1)$-ésimo caracter de t. Se eles são iguais, j aumenta em 1, e continuamos a comparação, indo para a próxima letra de p. Se cobrirmos todo o padrão p, temos a ocorrência, pela primeira vez, na posição m de t.
- Se eles não são iguais, olhamos q_j. Aumentamos m para $m + j - q_j - 1$ e mudamos j para $q_j + 1$; se $q_j = -1$, resetamos j para 1. Voltamos para o passo anterior.

No nosso exemplo, começamos com $m = 1$ e as comparações dão certo até $j = 3$:

`abc abcdab abcdabcdabde` `abcdabd`	$m = 1$ $j = 4$

Quando $j = 4$, são comparados o espaço de t e **d** de p. A comparação dá errado, ou seja, não encontramos p. Poderíamos avançar m em 1, mas o j-ésimo termo da sequência q nos diz que $q_j = 0$. Então, avançamos m de 1 para $m + j - q_j - 1 = 1 + 4 - 1 - 0 = 4$ e resetamos j para 1.

`abc abcdab abcdabcdabde` `   abcdabd`	$m = 4$ $j = 1$

Deu errado de novo, e avançamos m para $m + 1 - (-1) - 1 = 5$. Para esse m conseguimos uma coincidência, e j avança de 1 até 6. Na sétima e última tentativa, dá errado. Quase!

`abc abcdab abcdabcdabde` `    abcdabd`	$m = 5$ $j = 7$

Agora, como a coincidência que temos contém `ab` no final (como o computador sabe disso? Ele nota que o j-ésimo termo da sequência q é $q_6 = 2$) para avançar m em $j - 1 - q_j = 7 - 1 - 2 = 4$ unidades, de 5 para 9; também não precisamos verificar o `ab` do final, e resetamos j para $q_j + 1 = 3$ no lugar de 1. Não dá certo, e, considerando que o j-ésimo termo de q é 0, só adiantamos m para $m + j - q_j - 1 = 11$.

`abc abcdab abcdabcdabde` `        abcdabd`	$m = 9$ $j = 3$

Dá errado para $m = 11$, mas dá certo para $m = 12$. Novamente dá quase tudo certo, com j indo de 1 até 6, mas dá errado para $j = 7$.

`abc abcdab abcdabcdabde` `           abcdabd`	$m = 12$ $j = 7$

Novamente movemos m de 12 para 16 e resetamos para $j = 3$. As próximas 5 comparações dão certo, e o computador informa que existe uma ocorrência de p em t, começando na posição 16 de t.

No nosso exemplo, fizemos, além das comparações em azul e vermelho, mais 5 comparações, dando um total de $4 + 1 + 7 + 1 + 7 + 5 = 25$ comparações.

Agora é sua vez!

a) Construa a sequência q para p sendo “`nano`”.

b) Sendo p o padrão “`nano`” e t, “`banananobano`”, calcule a quantidade de comparações usadas pelo algoritmo KMP até a ocorrência de p em t.

c) Vamos mostrar que a etapa ii de comparação tem no máximo $2n$ comparações, sendo n a quantidade de caracteres do texto t.

c.1) Explique por que a posição m de t nunca diminui;

c.2) Justifique por que a posição $m + j - 1$ de t em que a comparação de caracteres é feita nunca diminui;

c.3) Conclua que a quantidade de comparações é menor ou igual a $2n$.