XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

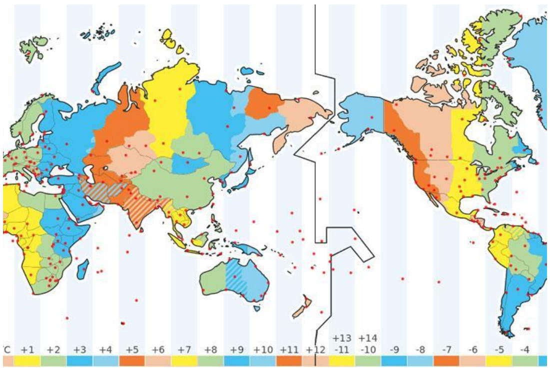
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

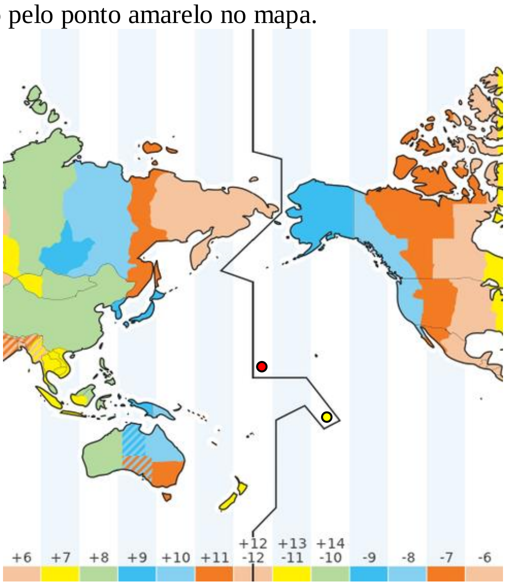
PROBLEMA 1

Hoje no horário da premiação, às 16:30 em São Paulo, será 3:30 do dia 8 de novembro em Tóquio. Por isso não faz sentido todos do mundo usarmos o mesmo horário. Para isso, existem os *fusos horários*, que indicam como calcular a hora. O horário de verão, que adianta uma hora, pode influenciar essa conta. Por exemplo, a diferença de horário entre o São Paulo e Londres, no Reino Unido, é de três fusos horários, mas aqui temos o horário de verão. Se em São Paulo são 8 horas, descontado o horário de verão são 7 horas, e no Reino Unido são 7 + 3 = 10 horas.

Com as diferenças de horário, como saber em que dia estamos? Para isso, usamos a *linha internacional da data*, que indica em que dia estamos. A linha internacional de data é independente dos fusos horários, ou seja, não coincide com algum fuso horário. No mapa a seguir, os fusos são as faixas coloridas e a linha internacional da data é a linha preta que corta o mapa em duas regiões, começando e terminando no fuso +12, que coincide com o fuso –12.



O lugar mais próximo da linha internacional da data ao leste é a ilha de Howland, um território dos EUA, na Oceania, representado pelo ponto vermelho no mapa, e o lugar mais próximo da linha internacional da data a oeste é a cidade de Kiritimati, no país de Kiribati, também na Oceania, representado pelo ponto amarelo no mapa.



a) Se é meio-dia do dia 7 de novembro na ilha de Howland, que horas de qual dia são em Kiritimati?

b) Se iniciarmos um cronômetro (que mede qualquer quantidade de horas possível) na hora 00:00:00 do dia 7 de novembro em Kiritimati, quanto tempo ele estará marcando na hora 00:00:00 do dia 8 de novembro na ilha de Howland, ou seja, por quanto tempo é dia 7 de novembro em algum lugar do mundo?

PROBLEMA 2

O *rating Elo* é uma maneira de calcular a força relativa entre enxadristas. Esse sistema, criado pelo físico Arpad Elo, é usando na organização dos principais torneios de xadrez em todo o mundo.

Dizemos que a *pontuação esperada* de um enxadrista em uma partida é igual a sua probabilidade de vitória mais metade da probabilidade de empate. Assim, sejam A e B enxadristas que tenham ratings, respectivamente, R_A e R_B. Utilizando o rating Elo, podemos estimar que a pontuação esperada de A é

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}}$$

e, analogamente, a pontuação esperada de B é

$$E_B = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_A - R_B}{400}}}$$

a) Prove que $E_A + E_B = 1$.

A Federação Internacional de Xadrez (FIDE) utiliza desde 1970 um ranking baseado nos ratings Elo. Para ter uma ideia dos valores dos ratings, podemos nos basear na tabela a seguir.

Rating	Título
Acima de 2700	Candidato a disputa do título mundial.
2500 a 2700	Grande Mestre Internacional (GMI)
2400 a 2500	Mestre Internacional (MI)
2300 a 2400	Mestre da FIDE
2200 a 2300	Candidato a Mestre
2000 a 2200	Expert
1800 a 2000	Classe A
1600 a 1800	Classe B
1400 a 1600	Classe C
1200 a 1400	Iniciante Forte
1000 a 1200	Iniciante

b) Pode-se estimar o rating de computadores e de antigos jogadores de xadrez. Por exemplo, Komodo 9.2, um dos melhores programas da atualidade tem um rating estimado de (uau!!) 3300. O enxadrista e matemático Edward Lasker, um dos melhores jogadores do início do século 20, teve o rating estimado em 2470. Verifique que a pontuação esperada de Lasker em jogo contra Komodo é menor do que 1%.

c) É claro que o rating de um jogador muda dependendo de seu desempenho. Suponha que um jogador tenha pontuação esperada E, porém tenha obtido S pontos. Então, sendo R o seu antigo rating, o seu novo rating R' será

$$R' = R + K(S - E)$$

Em que podemos adotar $K = 10$, para jogadores com rating acima de 2400 e pelo menos 30 jogos oficiais.

O jogador brasileiro melhor rankeado atualmente (novembro de 2015) é o GMI Rafael Leitão com rating 2633. O jogador alemão melhor rankeado é o GMI Liviu-Dieter Nisipeanu com rating 2683. Considere que em um match de 8 partidas Leitão vença Nisipeanu por 7 a 1. Qual seria o novo rating do GMI brasileiro?

PROBLEMA 3

Provavelmente você já ouviu falar sobre o Oscar de melhor filme, mas você sabe como é feita a votação que elege o melhor filme? O método usado é chamado voto preferencial. Nesse método, há cinco indicados para o melhor filme. Cada um dos membros da Academia de Artes e Ciências Cinematográficas deve ordenar os cinco filmes em sua ordem de preferência. Então ele deve colocar $\mathbf{1}$ ao lado do filme que ele considera o melhor, $\mathbf{2}$ ao lado do filme que considera o segundo melhor e assim por diante. Primeiro, são contados os votos apenas com número $\mathbf{1}$. Se algum filme possuir mais que $\mathbf{50\%}$ do total de votos, ele é eleito o melhor filme. Caso contrário, o filme com menor quantidade de votos $\mathbf{1}$ é eliminado da disputa e cada um de seus votos é passado para a próxima preferência, ou seja, os filmes que estão com número $\mathbf{2}$. Após os votos serem redistribuídos, se algum filme possuir mais que $\mathbf{50\%}$ dos votos ele é eleito. Caso contrário, o filme com menor quantidade de votos é eliminado e cada voto daquele filme passa para o filme preferido do eleitor que ainda não foi eliminado. O processo segue até que um filme seja eleito com mais que $\mathbf{50\%}$ das preferências dos votos entre os filmes que restaram.

Suponha que os candidatos ao Oscar $\mathbf{2016}$ de melhor filme são:

A – Cheirosos e Curiosos $\boldsymbol{\pi}$;
B – Straw Wars: o despertar na roça;
C – Atividade para Aderbal: diversão com asma;
D – Os Jengadores: a era do Cupom;
E – Bonde dos Espiões.

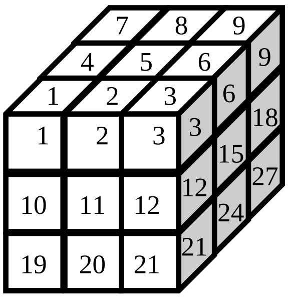
Usaremos as letras A, B, C, D e E antes do nome de cada filme para apresentar a contagem dos votos. A tabela a seguir mostra a primeira e a segunda opção dos votos de cada um dos 5783 eleitores. Na coluna (fileira vertical) “A” estão os votos em que o filme A foi o preferido dos eleitores. Na linha (fileira horizontal) “B” estão os votos em o segundo filme preferido para ganhar o Oscar de melhor filme. Por exemplo, para 85 membros o melhor filme foi A e o segundo melhor filme foi B e para 185 membros o melhor filme foi D e o segundo melhor filme foi E.

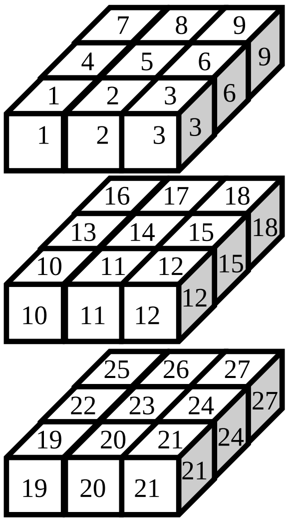
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A		259	14	73	98
B	85		151	91	1503
C	9	436		80	136
D	7	704	3		162
E	255	1349	183	185	

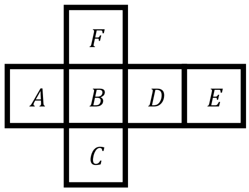
a) Qual o filme será eliminado após a primeira contagem dos votos 1?
b) Após redistribuir os votos do filme eliminado na primeira contagem dos votos 1, haverá um eleito como melhor filme? Se sim, qual filme e com quantos votos ele ficou? Caso não haja filme eleito, justifique.
c) Em outra votação (também iniciada com cinco filmes), após a primeira contagem dos votos 1**,** o filme "Lembraram de mim" foi o mais votado, mas não obteve 50% e, por isso, não foi eleito. O filme "O estiloso caso de Wesley S." foi o segundo mais votado. O filme com menos votos 1 foi "O apagado" e, portanto, ele foi eliminado. Após a redistribuição usando os votos 2 do filme eliminado, o filme "O estiloso caso de Wesley S." superou a quantidade de votos do filme "Lembraram de mim".
Mostre que ainda não haverá conclusão da eleição do melhor filme, ou seja, que será necessário fazer pelo menos mais uma eliminação para que seja eleito o melhor filme.

PROBLEMA 4
Considere um cubo $n \times n \times n$ formado por n^3 cubinhos unitários. Nesse problema, iremos verificar como podemos pintar todas as faces dos cubinhos unitários pintando algumas vezes as faces do cubo maior que podemos montar com todos eles.
Em cada vez, é claro, mudaremos os cubinhos de posição para garantir que pintaremos faces que não tinham sido pintadas anteriormente.

a) Ao pintarmos as faces do cubo $n \times n \times n$, ao todo quantas faces dos cubinhos unitários são pintadas?
b) Utilizando a resposta do item anterior, prove que devemos pintar as faces do cubo maior pelo menos n vezes para pintar todas as faces dos cubinhos unitários.
c) Nesse item iremos mostrar como pintar todas as faces de 27 cubinhos unitários pintando 3 vezes um cubo $3 \times 3 \times 3$.
Para descrever o processo, iremos numerar os cubinhos de 1 a 27 e denominar as suas faces A, B, C, D, E, F como nos desenhos abaixo:







Assim, quando escrevermos $8E$, estaremos nos referindo à face E do cubo 8.

Podemos observar que os cubinhos que são colocados nos vértices do cubo maior têm 3 de suas faces pintadas; os cubinhos que são colocados nas arestas do cubo maior, mas não nos vértices, têm 2 faces pintadas; os cubinhos que são colocados nas faces, mas não nas arestas, têm 1 face pintada.
Com as considerações feitas anteriormente, iremos representar as faces pintadas em cada vez através de tabelas. A tabela correspondente à Pintura 1 já está preenchida para você (de nada!).

	Pintura 1
Vértices	1A, 1B, 1C; 3A, 3B, 3C; 7A, 7B, 7C; 9A, 9B, 9C; 19A, 19B, 19C; 21A, 21B, 21C; 25A, 25B, 25C; 27A, 27B, 27C.
Arestas (Não Vértices)	2A, 2B; 4A, 4B; 6A, 6B; 8A, 8B; 10A, 10B; 12A, 12B; 16A, 16B; 18A, 18B; 20A, 20B; 22A, 22B; 24A, 24B; 26A, 26B.
Faces (Não Arestas)	5A; 11A; 13A; 15A; 17A; 23A.

Faça uma tabela similar – indicando vértices, arestas e faces – em seu *Bloco de Resoluções*. Essa tabela corresponderá à Pintura 2. Você deve preenchê-la de modo que, após a terceira pintura do cubo maior (você não precisa indicá-la!), todas as faces dos cubinhos unitários estejam pintadas. Observe que na Pintura 1 nenhuma face do cubo 14 foi pintada, pois ele está no centro do cubo maior.

Agora vamos ver como fazer o mesmo para cubos maiores, em especial, para o cubo $7 \times 7 \times 7$. Não se desespere! Não iremos pedir para preencher tabelas como a do item anterior (são $6 \times 7^3 = 2058$ faces dos cubinhos unitários). Faremos algumas perguntas que consideramos que, se você conseguir responder, você sabe completar a tarefa para qualquer cubo não importando o tamanho.

d) Em 6 pinturas das faces do cubo $7 \times 7 \times 7$ qual é o número máximo de cubinhos unitários que podem ser pintados inteiramente, ou seja, ter todas as faces pintadas? Não esqueça de justificar a sua resposta.

e) Para ser possível concluir a pintura das faces dos cubinhos unitários em 7 pinturas após a *Pintura 6* o número de cubinhos unitários pintados inteiramente deve "caber" no interior do cubo maior (você vai observar que não é uma boa ideia o que fizemos no item d). No nosso caso, exatamente quantos cubinhos unitários devem estar "prontos" após a *Pintura 6*?

f) Considerando que completaremos a nossa tarefa em 7 pinturas, qual é o número mínimo de pinturas para deixarmos prontos os cubinhos unitários que na última delas estarão no interior do cubo?

PROBLEMA 5

Charles Babbage (1791-1871) foi um inventor que idealizou e projetou um protótipo do computador moderno, a *Máquina Analítica*, para o qual Ada Lovelace (1815-1852), filha do poeta Lord Byron, escreveu o que muitos consideram o primeiro programa de computador, em 1843. No lugar de microchips, a Máquina Analítica de Babbage usava engrenagens.

Um dos componentes para cálculos da Máquina Analítica faz a soma de dois números. Cada algarismo é uma engrenagem, e os números são formados empilhando as engrenagens, com as unidades embaixo das dezenas, as dezenas embaixo das centenas, e assim por diante. O dispositivo funciona em três partes: na primeira, após serem dispostos os números A e B nas engrenagens, giramos a engrenagem A até ela chegar ao 0, assim o número que antes era A passa a ser $A + B$.

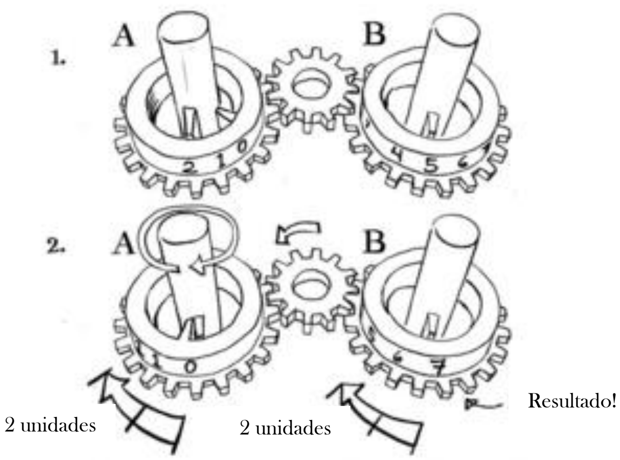


Figura 1: somando 2 *e* 5. *O resultado aparece na engrenagem* B.

O problema ocorre quando $A + B$ ultrapassa 10 e há um "vai um" para a próxima casa decimal. Para resolver isto, na segunda parte, toda vez que a engrenagem B ultrapassa o 9, ela empurra uma alavanca C através de um dente (observe a figura 2), que posiciona um dente em D logo abaixo do chanfro E (detalhe I na figura 3). Após todas as engrenagens em A serem zeradas, a haste H é levantada, levantando junto com ela todos os chanfros correspondentes aos "vai um" e encaixando as engrenagens G correspondentes em A. Um giro de G faz girar A uma vez, que faz B também girar uma vez, adicionando todos os "vai uns" de uma vez. Ainda há um segundo problema a ser resolvido, quando ao adicionar um "vai um", obtemos um segundo "vai um" que não havia sido contado antes. Para isto, na terceira parte, um dispositivo F acoplado em B se encaixa num chanfro toda vez que B está parado em 9 (detalhe II na figura 3). Assim, se um "vai um" é somado a esse 9, então ele também gerará um "vai um" e o próximo chanfro também será levantado. Mas se não há "vai um" a ser somado ao 9, então não haverá "vai um" para o próximo chanfro, assim ele não será levantado.

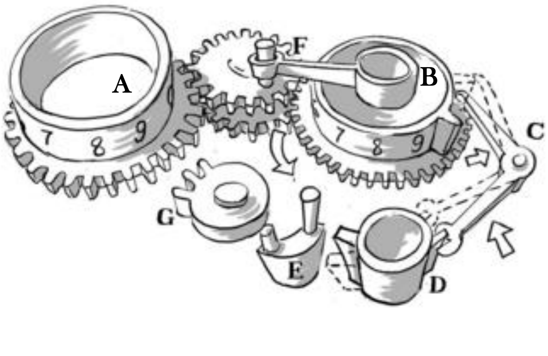


Figura 2: como cada algarismo da soma é encontrado.

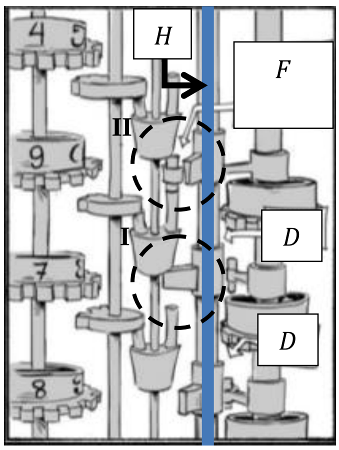


Figura 3: gerenciando os "vai-uns".

(todas as figuras são de Sydney Padua, *The Thrilling Adventures of Lovelace and Babbage*.)

a) Indique quais dispositivos, D ou F, são acionados em cada algarismo na soma $1458956 + 2593049$.

b) Um potencial problema seria os dispositivos D e F serem acionados ao mesmo tempo, encavalando os chanfros. Mas isso nunca acontece. Explique por quê.

c) Suponha que cada movimento de engrenagem gaste um segundo por dente na Máquina Analítica (por exemplo, uma engrenagem demora 4 segundos para girar do 1 para o 5). Considerando que engrenagens são giradas ao mesmo tempo, mostre que a máquina demora no máximo 10 segundos para efetuar a soma.