XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

As eleições para alguns cargos legislativos (vereador e deputados estaduais e federais) são feitas no Brasil usando o *sistema proporcional* de votos. A ideia é contar os votos para cada partido (ou coligação), independente do candidato, e dividir as vagas de modo que cada partido tenha uma quantidade de cadeiras aproximadamente proporcional ao total de votos. Só então se considera as votações individuais dos candidatos: as vagas são preenchidas pelos candidatos mais votados de cada partido.

Mas as contas ficam um pouco mais elaboradas quando consideramos as sobras. Como essas vagas são determinadas?

- Primeiro, calcula-se o *quociente eleitoral* Q, que é o total de votos válidos dividido pelo total de vagas.
- Depois, calcula-se o número de vagas para cada partido dividindo-se o número de votos de cada partido por Q. Os algarismos depois da vírgula são desprezados (mesmo se forem iguais a 5 ou mais).
- Geralmente sobram vagas para serem preenchidas, e fazemos isso preenchendo uma vaga de cada vez: divide-se o total de votos de cada partido pela quantidade de vagas obtidas por cada partido mais 1. O maior número fica com a primeira vaga. Fazemos o mesmo para a próxima vaga, tomando o cuidado de atualizar as quantidades de vagas a cada passo.

Por exemplo, suponha que na cidade de Matemopolina 4 partidos, PPM (Partido Paulista de Matemática), PBM (Partido Brasileiro da Matemática), PM (Partido da Matemática) e MAT (Matemáticos), estejam concorrendo a 16 vagas na Assembleia Matemática. Nessa eleição, os 8.890 votos válidos foram distribuídos da seguinte forma:

PPM	PBM	PM	MAT
1.618	3.140	2.718	1.414

O quociente eleitoral é

$$Q = \frac{8890}{16} = 555{,}625$$

Deste modo, as quantidades de vagas são

PPM	PBM	PM	MAT
$\frac{1.618}{555{,}625} \approx \boxed{2},91$	$\frac{3.140}{555{,}625} \approx \boxed{5},65$	$\frac{2.718}{555{,}625} = \boxed{4},89$	$\frac{1.414}{555{,}625} = \boxed{2},54$

Com isso, preenchemos $2 + 5 + 4 + 2 = 13$ vagas. Faltam $16 - 13 = 3$. A seguinte tabela indica como as duas vagas seguintes são atribuídas:

PPM	PBM	PM	MAT	Dono da vaga
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{4+1} = 543{,}6$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PM
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{5+1} = 453$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PPM

a) Para que partido é atribuída a última vaga dessa eleição?

b) Ocorreu outra eleição, agora para a Câmara dos Matemadores na cidade de Matemalinos. São somente 9 vagas, e os resultados foram os seguintes:

PPM	PBM	PM	MAT
1.900	1.350	550	2.250

Quantas vagas ficaram para cada partido nessa eleição? Não se esqueça de mostrar os seus cálculos.

PROBLEMA 2

Nessa questão estudaremos uma aplicação de identidades polinomiais à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x$, teremos

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

(*no desenvolvimento acima, utilizamos também a identidade* $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$.)

Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.

Tal abordagem deu origem às denominadas *Fatorações Aurifeullianas* um ramo bastante rico da Teoria dos Números.

a) Desenvolva a expressão $(x+1)((x+1)^2 - 3x)$.

b) Utilizando a identidade (*Fatoração Aurifeulliana*) obtida no item a, apresente a fatoração em primos de 27000001.

PROBLEMA 3

O programa de TV *Futurama*, no episódio "O Prisioneiro de Benda", apresenta um *trocador de mentes* que permite que dois seres troquem de corpo. Todavia, as trocas de corpo não têm volta, ou seja, se dois seres (mentes) trocam de corpo, não podem trocar novamente, mesmo que estejam em outros corpos. No episódio, várias trocas acontecem, e não parece fácil desfazê-las.

Acontece que, não importando como estejam trocados os corpos de n seres, é possível fazer com que todos voltem ao normal envolvendo dois seres adicionais. O autor desse episódio é o escritor de séries Ken Keeler, que é doutor em Matemática em Harvard e resolveu esse problema especialmente para o programa.

a) No começo do episódio, Amy e o Professor Farnsworth trocam de corpo, e ele sugere que Bender os ajude a desfazer a troca de corpos. Em seguida, o próprio professor percebe que não é possível que os três voltem ao normal. Explique o porquê.

O item anterior mostra que um ser a mais não permite desfazer as trocas. Veremos agora como desfazer as trocas com dois seres a mais.

No episódio, nove personagens trocaram de corpos, e imediatamente antes da resolução do problema, estão trocados da seguinte forma:

Mente	Fry (1)	Zoidberg (2)	Leela (3)	Professor (4)	Bender (5)	Imperador (6)	Balde d'Água (7)	Amy (8)	Hermes (9)
Corpo	Zoidberg (2)	Fry (1)	Professor (4)	Bender (5)	Imperador (6)	Balde d'Água (7)	Amy (8)	Hermes (9)	Leela (3)

(Sim, o Balde d'Água é um ser e tem mente e corpo.)

A partir de agora, usaremos os números no lugar dos personagens:

Mente	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Corpo	**2**	**1**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**3**

b) Descreva uma maneira de desfazer a troca entre Fry e Zoidberg:

Mente	**1**	**2**
Corpo	**2**	**1**

usando também os seres x e y, que nunca passaram por trocas. Considere que x e y só podem trocar entre si no máximo uma vez, e que Fry (1) e Zoidberg (2) não podem mais trocar entre si.

c) Mostre uma maneira de desfazer as trocas dos personagens do episódio, sabendo que os dois seres extras são Ethan (10) e Clyde (11). Lembre-se: os personagens de 1 a 9 não podem mais trocar entre si e 10 e 11 trocam no máximo uma vez.

PROBLEMA 4

Dizemos que um número inteiro positivo é *perfeito* se a soma de seus divisores positivos é igual ao dobro do número. Por exemplo, 6 e 28 são números perfeitos, pois:

$$1+2+3+6=2\cdot 6 \text{ e } 1+2+4+7+14+28=2\cdot 28.$$

Euler demonstrou que todos os números perfeitos pares são da forma $2^n(2^{n+1}-1)$, $n\in\mathbb{N}$, em que $2^{n+1}-1$ é primo. Um dos problemas em aberto (ou seja, que até hoje não foram resolvidos) mais antigos de toda a Matemática é relativo à existência de números perfeitos ímpares. Atualmente, sabe-se que, caso exista um número perfeito ímpar, ele é maior do que 10^{300} (verificado por Brent e colaboradores em 1991) e tem pelo menos 75 fatores primos (demonstrado por Hare em 2005).

Nessa questão estudaremos uma generalização do conceito de número perfeito. Para tal, necessitaremos de algumas fórmulas (que – oba! – também poderão ser usadas para resolver o problema).

- *Média Harmônica*: A média harmônica dos números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ é dada por
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

  Para as próximas definições, considere que $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração em primos do número inteiro n, $n>1$.
- *Número de divisores positivos*: $d(n)=(\alpha_1+1)\cdot\dots\cdot(\alpha_k+1)$
- *Soma dos divisores positivos*: $\sigma(n)=(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdot\dots\cdot(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})$

Por exemplo, para $28=2^2\cdot 7$, $d(28)=(2+1)(1+1)=6$, ou seja, 28 tem 6 divisores positivos, e $\sigma(28)=(1+2+2^2)\cdot(1+7)=56$, ou seja, a soma dos divisores positivos de 28 é 56.

Em 1948, Oysten Ore criou um conceito que generaliza o conceito de número perfeito: dizemos que um número inteiro positivo é *harmônico* se a média harmônica de seus divisores é um número inteiro. Por exemplo, 6 e 28 são números harmônicos, pois:

$$\frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2 \quad \text{e} \quad \frac{6}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}}=3.$$

a) Vejamos o que acontece quando multiplicamos 28 pela soma dos inversos de seus divisores:

$$28\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}\right)=28+14+7+4+2+1=\sigma(28).$$

Isso não é uma coincidência! Explique por que a soma dos inversos dos divisores de um número n é $\frac{\sigma(n)}{n}$ e conclua que a média harmônica dos divisores de n é igual a

$$\frac{n\cdot d(n)}{\sigma(n)}.$$

b) Como

$$\frac{n \cdot d(n)}{\sigma(n)} = \frac{p_1^{\alpha_1}(\alpha_1 + 1)}{\left(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k}(\alpha_k + 1)}{\left(1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}\right)},$$

podemos descobrir inteiros harmônicos observando qual é a “colaboração” de cada número primo na igualdade acima.
Para exemplificar, digamos que desejamos obter um inteiro harmônico que possua o fator 5^2. Teremos, então, no cálculo da média harmônica o fator:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31}$$

O denominador 31 sugere que devemos ter esse número como fator primo do inteiro harmônico que estamos procurando. A fórmula até agora é:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32}$$

Há um fator 16 sobrando no denominador. Um 2^3 resolve a situação:

$$\frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32} \cdot \frac{2^3 \cdot 4}{15}$$

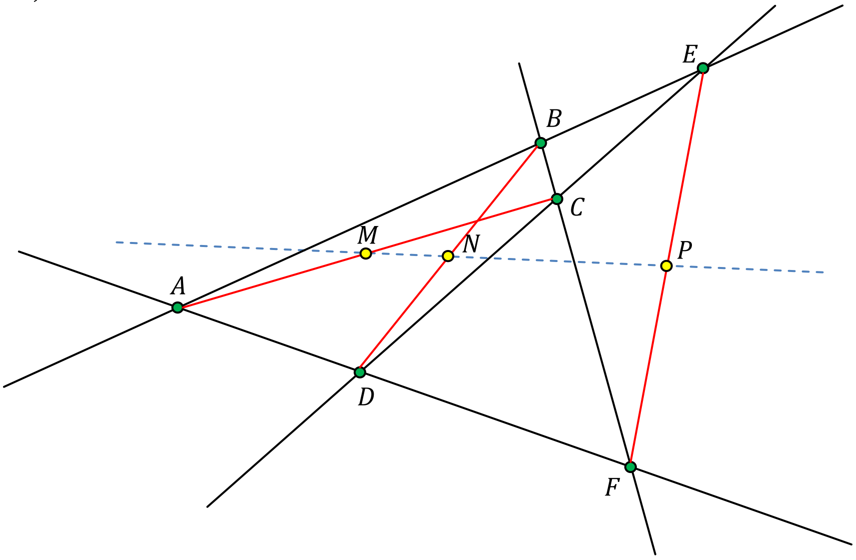
Em resumo, sendo $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 31 = 6200$:

$$\frac{6200 \cdot d(6200)}{\sigma(6200)} = \frac{5^2 \cdot 3}{31} \cdot \frac{31 \cdot 2}{32} \cdot \frac{2^3 \cdot 4}{15} = 10.$$

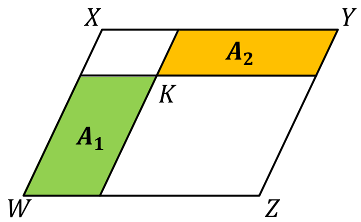
Ou seja, 6200 é um inteiro harmônico.
Agora é a sua vez: determine um inteiro harmônico que possua o fator 3^2.
c) Determine um inteiro positivo cuja média harmônica de seus divisores seja igual a 91.

PROBLEMA 5

Um *quadrilátero completo* é uma modificação do conceito usual de quadrilátero: é a união de quatro *retas*. Se não houver retas paralelas entre essas quatro retas, elas determinam seis pontos: além dos pontos A, B, C e D, temos os pontos E e F, que são interseções dos prolongamentos de lados opostos de um quadrilátero usual. Com isso, um quadrilátero completo tem *três* diagonais, que na figura a seguir são AC, BD e EF.



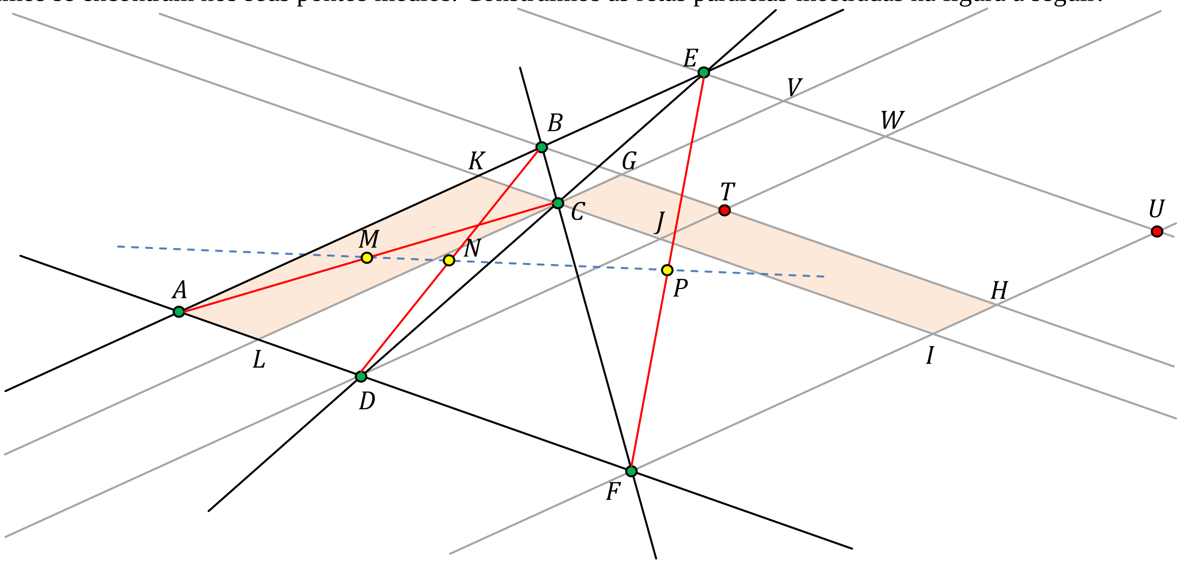
O que são esses pontos M, N e P? Eles são os pontos médios das três diagonais. Nesse problema, provaremos o *teorema do quadrilátero completo*: **os pontos médios das três diagonais de um quadrilátero completo são colineares**.
a) Começaremos com um lema envolvendo paralelogramos. Na figura a seguir, $XYZW$é um paralelogramo e K é um ponto em seu interior. Traçamos por K duas paralelas a lados do paralelogramo.



Prove que as áreas coloridas A_1 e A_2 são iguais se, e somente se, K está sobre a diagonal XZ. Aqui, você precisa provar dois fatos:

- Se K está sobre XZ então $A_1 = A_2$;
- Se K não está sobre XZ então $A_1 \neq A_2$.

b) O que paralelogramos têm a ver com o teorema do quadrilátero completo? O elo é o fato conhecido de que as diagonais de paralelogramos se encontram nos seus pontos médios. Construímos as retas paralelas mostradas na figura a seguir:



Explique por que os paralelogramos $AKCL$ e $GCIH$, destacados na figura acima, têm a mesma área.

c) Mostre que as áreas de $TGVW$ e $JTHI$ são iguais e conclua que C, T e U são colineares.

d) Prove o teorema do quadrilátero completo.